La integral de Lebesgue
(una unidad de análisis real)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

10 de junio de 2024

Unidad "Integral de Lebesgue"

Objetivo:

definir la integral de Lebesgue y demostrar sus propiedades principales.

Prerrequisitos:

- nociones básicas sobre funciones (sobre todo, propiedades de la preimagen),
- supremos e ínfimos, límites superiores e inferiores,
- sigma-álgebras y sus conjuntos generadores, funciones medibles,
- funciones simples y sus propiedades,
- medidas y sus propiedades.

Plan

1. Integración de funciones simples medibles positivas
2. Integración de funciones medibles positivas
3. Integración de funciones medibles reales
4. Integración de funciones medibles complejas

Plan

1. Integración de funciones simples medibles positivas
2. Integración de funciones medibles positivas
3. Integración de funciones medibles reales
4. Integración de funciones medibles complejas

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$, o $Y = [0, +\infty]$, o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.
Denotamos por $\mathcal{B}_Y$ la σ-álgebra de Borel de Y.

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) := \{f \in Y^X : \quad \forall B \in \mathcal{B}_Y \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F}\}.$$

Para $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, los rayos $(v, +\infty)$ generan $\mathcal{B}_Y$, por eso

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \quad &\iff \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad f^{-1}[(v, +\infty)] \in \mathcal{F} \\ &\iff \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad \{x \in X : \ f(x) > v\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Funciones simples medibles

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple si el conjunto $f[X]$ es finito.
Representación canónica de funciones simples:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j 1_{P_j},$$

donde $v_1, \ldots, v_m \in Y$, diferentes a pares, $(P_1, \ldots, P_m)$ es una partición de Y.
En la definición de partición pedimos $P_j \neq \varnothing$ para cada j.

f es medible $\iff$ $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) \coloneqq \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)\colon\ f[X] \text{ es finito}\}$.

Funciones simples medibles que se anulan fuera de un conjunto de medida finita

$$\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, Y) \coloneqq \{f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y): \ \mu(f^{-1}[Y \setminus \{0\}]) < +\infty\}.$$

Si $f \in \mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, Y)$, entonces

$$f = 0 \cdot 1_{P_0} + \sum_{j=1}^{m} v_j 1_{P_j},$$

donde $v_1, \ldots, v_m \in Y \setminus \{0\}$, dif. a pares, $(P_1, \ldots, P_m)$ es una partición de $Y \setminus P_0$, $\mu(P_j) < +\infty$ para cada j en $\{1, \ldots, m\}$.

Se admiten los casos $P_0 = \varnothing$ y $\mu(P_0) = +\infty$.

Funciones indicadoras medibles

$$\mathcal{J}(X, \mathcal{F}) \coloneqq \{1_A \colon \ A \in \mathcal{F}\}.$$

$$\mathcal{J}_1(X, \mathcal{F}, \mu) \coloneqq \{1_A \colon \ A \in \mathcal{F}, \ \mu(A) < +\infty\}.$$

En estos términos,

$$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) = \text{span}_Y(\mathcal{J}(X, \mathcal{F})),$$
$$\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, Y) = \text{span}_Y(\mathcal{J}_1(X, \mathcal{F}, \mu)),$$

donde $\text{span}_Y(C) \coloneqq$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
2. Halmos, Royden, etc.: empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty))$.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
2. Halmos, Royden, etc.: empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty))$.
3. Empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
2. Halmos, Royden, etc.: empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty))$.
3. Empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.
4. Simonenko: usar particiones del codominio.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
2. Halmos, Royden, etc.: empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty))$.
3. Empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.
4. Simonenko: usar particiones del codominio.

En cada uno de estos caminos, la integral se define en varias etapas.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
2. Halmos, Royden, etc.: empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty))$.
3. Empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.
4. Simonenko: usar particiones del codominio.

En cada uno de estos caminos, la integral se define en varias etapas.

En este curso seguimos el camino 1.

Definición de la integral

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}.$$

Definición de la integral

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

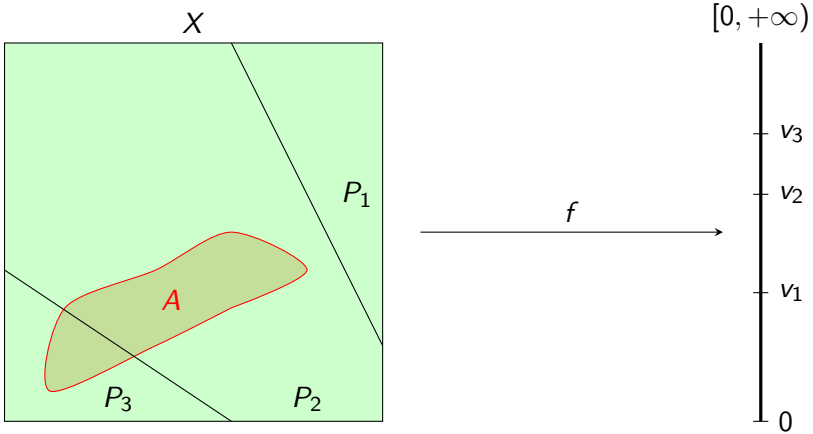
Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}.$$

Definimos

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j \cap A).$$

También denotamos esta integral por $\int_A^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu$.



$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = v_1 \, \mu(A \cap P_1) + v_2 \, \mu(A \cap P_2) + v_3 \, \mu(A \cap P_3).$$

Integrar sobre un conjunto o sobre todo el espacio

Proposición

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, 1_A \, \mathrm{d}\mu.$$

Integral de una función simple medible positiva dada por una representación generalizada

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$f = \sum_{k=1}^{n} w_k \, 1_{Q_k},$$

donde $w_1, \ldots, w_n \in [0, +\infty)$, $(Q_1, \ldots, Q_n)$ un partición generalizada de X.

Sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} w_k \, \mu(Q_k \cap A).$$

Propiedades básicas

Proposición

Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $f(x) = b$ para cada x en A, entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = b \, \mu(A).$$

Propiedades lineales

Proposición

Sean $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $\lambda \in [0, +\infty)$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (\lambda f)\, \mathrm{d}\mu = \lambda \int_A f\, \mathrm{d}\mu.$$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f + g)\, \mathrm{d}\mu = \int_A f\, \mathrm{d}\mu + \int_A g\, \mathrm{d}\mu.$$

Plan

1. Integración de funciones simples medibles positivas
2. Integración de funciones medibles positivas
3. Integración de funciones medibles reales
4. Integración de funciones medibles complejas

Definición de $\int f$ para f positiva

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$D_f := \{g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) : \ g \leq f\}.$$

Definición de $\int f$ para f positiva

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$D_f := \{g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \colon \ g \leq f\}.$$

Dado $A \in \mathcal{F}$, definimos $J_A \colon \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \to [0, +\infty]$,

$$J_A(g) := \int_A^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu.$$

Definición de $\int f$ para f positiva

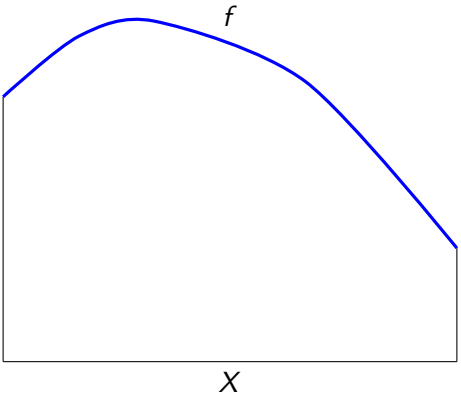
Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$D_f := \{g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \colon \ g \leq f\}.$$

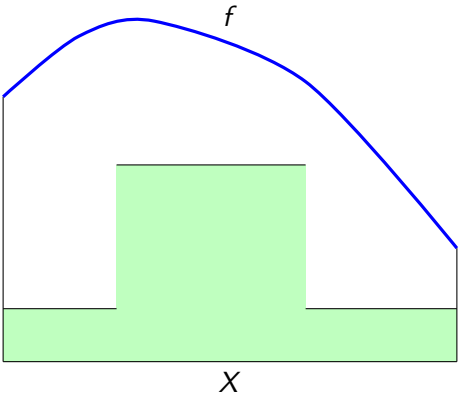
Dado $A \in \mathcal{F}$, definimos $J_A \colon \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \to [0, +\infty]$,

$$J_A(g) := \int_A^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu.$$

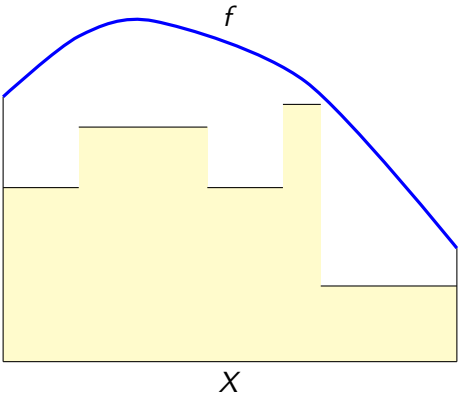
$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu := \sup(J_A[D_f]) = \sup \left\{ \int_A^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu \colon \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$



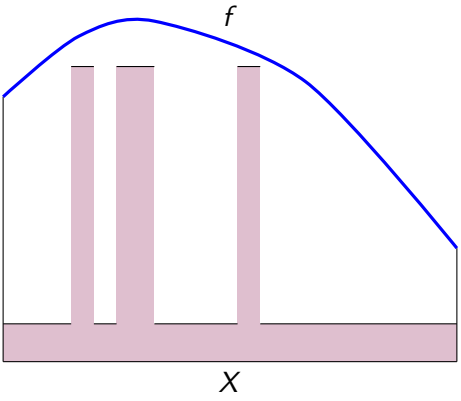
$$\int_A^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int_A^{(1)} g \,\mathrm{d}\mu : \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$



$$\int_A^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int_A^{(1)} g \,\mathrm{d}\mu : \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$



$$\int_A^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int_A^{(1)} g \,\mathrm{d}\mu : \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$



$$\int_A^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int_A^{(1)} g \,\mathrm{d}\mu : \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$

Observaciones sobre la definición de $\int f$ para f positiva

Proposición

Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Observaciones sobre la definición de $\int f$ para f positiva

Proposición

Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Proposición

Si $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, 1_A \, \mathrm{d}\mu.$$

Funciones positivas integrables

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty]) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]) : \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Algunas propiedades simples

Suponemos $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $A \in \mathcal{F}$.

Algunas propiedades simples

Suponemos $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $A \in \mathcal{F}$.

Proposición

Si $f(x) = b$ para cada x en A, entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = b \, \mu(A).$$

Algunas propiedades simples

Suponemos $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $A \in \mathcal{F}$.

Proposición

Si $f(x) = b$ para cada x en A, entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = b \, \mu(A).$$

Proposición

Si $f \leq g$, entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Desigualdad de Chebyshov–Márkov

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mu, [0, +\infty])$ y sea $v \in (0, +\infty)$. Entonces

$$\mu(\{x \in X\colon\ f(x) \geq v\}) \leq \frac{1}{v} \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Desigualdad de Chebyshov–Márkov

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mu, [0, +\infty])$ y sea $v \in (0, +\infty)$. Entonces

$$\mu(\{x \in X\colon\ f(x) \geq v\}) \leq \frac{1}{v} \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Corolarios:

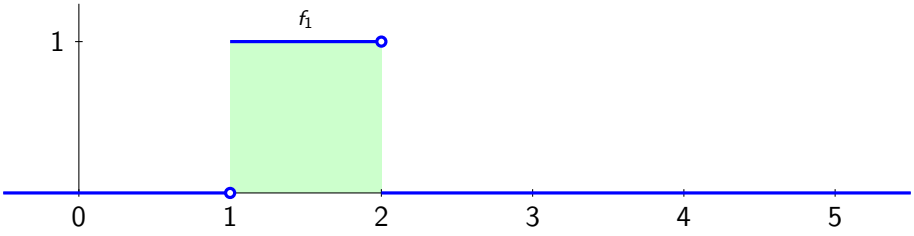
- Si $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, entonces $\mu(\{x \in X\colon\ f(x) = +\infty\}) = 0$.
- Si $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$, entonces $\mu(\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}) = 0$.

La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$

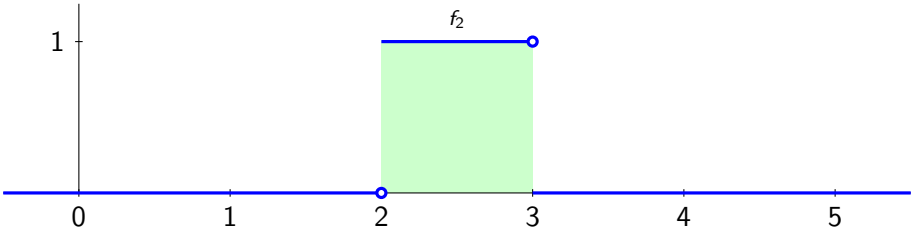
La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



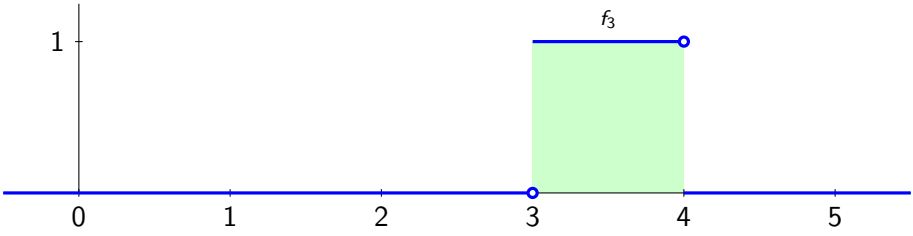
La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



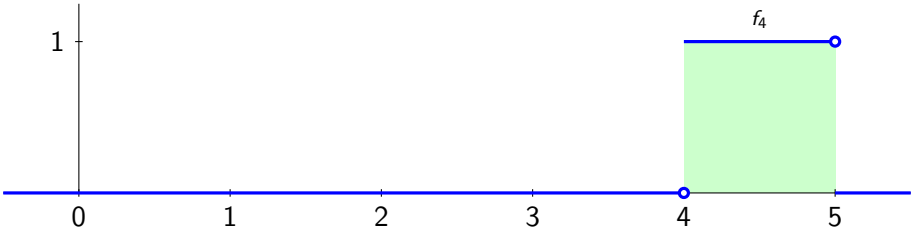
La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



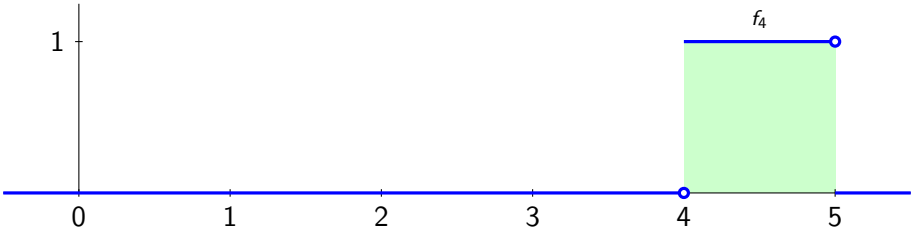
La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\mu = 1, \qquad \text{pero} \qquad \int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Teorema de la convergencia monótona

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Supongamos que para cada x en X la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Pongamos $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema de la convergencia monótona

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Supongamos que para cada x en X la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Pongamos $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

El resultado más difícil en esta unidad del curso (en el camino elegido): demostrar la desigualdad $\geq$ en este teorema.

Teorema de la convergencia monótona

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Supongamos que para cada x en X la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Pongamos $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

El resultado más difícil en esta unidad del curso (en el camino elegido): demostrar la desigualdad $\geq$ en este teorema.

Un error típico en la demostración: creer que existe n tal que $f_n \geq g$.

Lema de Fatou

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty])$. Entonces

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)\mathrm{d}\mu.$$

Aproximación de la integral por medio de una sucesión de integrales

Corolario (del teorema de la convergencia monótona)

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que $s_n \nearrow f$.

Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, \mathrm{d}\mu.$$

La integral de la suma de dos funciones positivas

Proposición

Si $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, entonces

$$\int_X (f + g)\, \mathrm{d}\mu = \int_X f\, \mathrm{d}\mu + \int_X g\, \mathrm{d}\mu.$$

La integral de una serie de funciones positivas

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty])$. Entonces

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

La medida definida como la integral de una función positiva sobre un conjunto de integración variable

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(A) \coloneqq \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida.

La continuidad de la integral respecto al conjunto de integración, para funciones positivas

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$. Entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall A \in \mathcal{F} \qquad \left(\mu(A) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_A f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon \right).$$

Plan

1. Integración de funciones simples medibles positivas
2. Integración de funciones medibles positivas
3. Integración de funciones medibles reales
4. Integración de funciones medibles complejas

La parte positiva y la parte negativa

Definimos $P, N \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\quad P(t) \coloneqq \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad N(t) \coloneqq \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$

La parte positiva y la parte negativa

Definimos $P, N\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\quad P(t) \coloneqq \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \qquad N(t) \coloneqq \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$

Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, tenemos

$$f = (P \circ f) - (N \circ f), \qquad |f| = (P \circ f) + (N \circ f).$$

La parte positiva y la parte negativa

Definimos $P, N\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\quad P(t) \coloneqq \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \qquad N(t) \coloneqq \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$

Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, tenemos

$$f = (P \circ f) - (N \circ f), \qquad |f| = (P \circ f) + (N \circ f).$$

La última igualdad implica que $P \circ f \leq |f|$ y $N \circ f \leq |f|$.

La parte positiva y la parte negativa

Definimos $P, N\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\quad P(t) \coloneqq \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \qquad N(t) \coloneqq \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$

Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, tenemos

$$f = (P \circ f) - (N \circ f), \qquad |f| = (P \circ f) + (N \circ f).$$

La última igualdad implica que $P \circ f \leq |f|$ y $N \circ f \leq |f|$.

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Entonces

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_X (P \circ f) \, \mathrm{d}\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X (N \circ f) \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Definición de $\int f$ para f real medible

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \colon \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Definición de $\int f$ para f real medible

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R}) \coloneqq \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \colon \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ y $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu \coloneqq \int_A^{(2)} (P \circ f) \, \mathrm{d}\mu - \int_A^{(2)} (N \circ f) \, \mathrm{d}\mu.$$

Definición de $\int f$ para f real medible

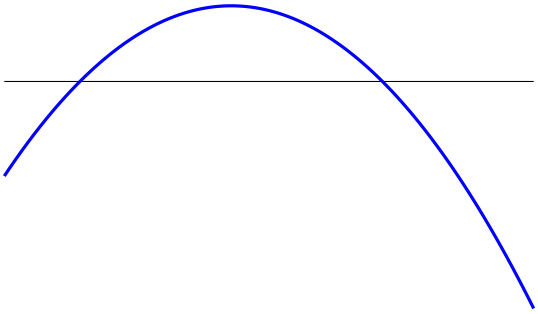
$$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{R}) \colon \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R})$ y $A \in \mathcal{F}$,

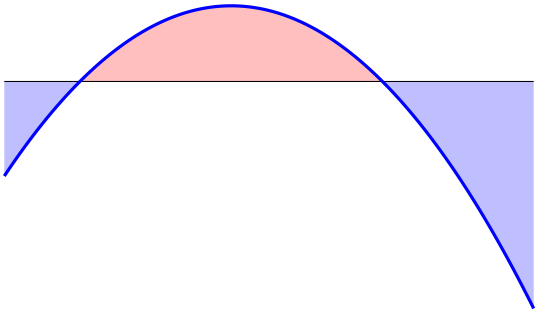
$$\int_A^{(3)} f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_A^{(2)} (P \circ f) \,\mathrm{d}\mu - \int_A^{(2)} (N \circ f) \,\mathrm{d}\mu.$$

Proposición

Si $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,[0,+\infty])$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces $\displaystyle\int_A^{(3)} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu.$



$$\int_A^{(3)} f \,\mathrm{d}\mu := \int_A^{(2)} (P \circ f) \,\mathrm{d}\mu - \int_A^{(2)} (N \circ f) \,\mathrm{d}\mu.$$



$$\int_A^{(3)} f \,\mathrm{d}\mu := \int_A^{(2)} (P \circ f) \,\mathrm{d}\mu - \int_A^{(2)} (N \circ f) \,\mathrm{d}\mu.$$

Propiedad aditiva

Proposición

Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu.$$

Propiedad aditiva

Proposición

Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu.$$

Una demostración falsa: $P \circ (f+g) = (P \circ f) + (P \circ g)$.

Propiedad aditiva

Proposición

Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu.$$

Una demostración falsa: $P \circ (f+g) = (P \circ f) + (P \circ g)$.

Idea de una demostración correcta:

$$P \circ (f+g) - N \circ (f+g) = f + g = P \circ f - N \circ f + P \circ g - N \circ g,$$

$$P \circ (f+g) + N \circ f + N \circ g = N \circ (f+g) + P \circ f + P \circ g.$$

Plan

1. Integración de funciones simples medibles positivas
2. Integración de funciones medibles positivas
3. Integración de funciones medibles reales
4. Integración de funciones medibles complejas

La parte real y la parte imaginaria

Para $z \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), $\quad \mathrm{Re}(z) \coloneqq x, \quad \mathrm{Im}(z) \coloneqq y$.

Entonces

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z), \qquad |z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2},$$

$$|z| \leq |\,\mathrm{Re}(z)| + |\,\mathrm{Im}(z)|, \qquad |\,\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \qquad |\,\mathrm{Im}(z)| \leq |z|.$$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_X |\,\mathrm{Re}(f)|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X |\,\mathrm{Im}(f)|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Definición de $\int f$ para f compleja

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \quad \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Definición de $\int f$ para f compleja

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \quad \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A^{(4)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_A^{(3)} \mathrm{Re}(f) \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_A^{(3)} \mathrm{Im}(f) \, \mathrm{d}\mu.$$

Definición de $\int f$ para f compleja

$$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}) \coloneqq \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}) \colon \quad \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_A^{(3)} \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_A^{(3)} \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu.$$

Proposición

Si $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R})$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces $\displaystyle\int_A^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu = \int_A^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu.$

Propiedades lineales

Proposición

Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu,$$

$$\int_A (\lambda f)\,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

Propiedades lineales

Proposición

Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu,$$

$$\int_A (\lambda f)\,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

Sale fácilmente de las propiedades lineales de $\int$ de funciones reales, usando propiedades de Re e Im:

$$\mathrm{Re}(f+g) = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{Re}(g), \quad \mathrm{Re}(\lambda f) = \mathrm{Re}(\lambda)\,\mathrm{Re}(f) - \mathrm{Im}(\lambda)\,\mathrm{Im}(f), \quad \ldots.$$

El valor absoluto de la integral

Teorema

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

El valor absoluto de la integral

Teorema

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Un camino malo de demostracion:

Si empezamos con $|\int f| \leq |\int \mathrm{Re}(f)| + |\int \mathrm{Im}(f)|$, no podremos llegar al resultado.

El valor absoluto de la integral

Teorema

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Un camino malo de demostracion:

Si empezamos con $|\int f| \leq |\int \mathrm{Re}(f)| + |\int \mathrm{Im}(f)|$, no podremos llegar al resultado.

Un camino bueno:

poner $z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ y encontrar τ con $|\tau| = 1$ y $\tau z = |z|$.

El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ y sea $g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$.

Supongamos que $f_n \xrightarrow{X} g$.

Adicionalmente, suponemos que

$$\exists h \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,[0,+\infty]) \text{ tal que } |f_n| \leq h \text{ para cada } n.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración: aplicar el lema de Fatou a la sucesión $\left(2h - |f_n - g|\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

La integral de una serie de funciones complejas

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Igualdad de funciones casi en todas partes

Para $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$,

$$f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} g \qquad \overset{\text{def}}{\iff} \qquad \mu(\{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Esta relación binaria es una relación de equivalencia.

Si $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} g$, entonces

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \qquad \iff \qquad \int_X |g|\,\mathrm{d}\mu < +\infty,$$

y

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

La continuidad de la integral respecto al conjunto de integración, para funciones complejas

Consideramos $\mathcal{F}$ con la siguiente pseudométrica:

$$\rho(P, Q) := \mu(P \triangle Q).$$

La continuidad de la integral respecto al conjunto de integración, para funciones complejas

Consideramos $\mathcal{F}$ con la siguiente pseudométrica:

$$\rho(P, Q) \coloneqq \mu(P \triangle Q).$$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Definimos $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(P) \coloneqq \int_P f \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una función uniformemente continua.

Razones para usar la integral de Lebesgue (en vez de la integral de Riemann)

- En varios ejemplos, los dominios de funciones no tienen una estructura buena y no se identifican fácilmente con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.
  En estos casos la integral de Riemann no está definida.

Razones para usar la integral de Lebesgue (en vez de la integral de Riemann)

- En varios ejemplos, los dominios de funciones no tienen una estructura buena y no se identifican fácilmente con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.
  En estos casos la integral de Riemann no está definida.
- Hay funciones que no son Riemann-integrables, pero son Lebesgue-integrables.

Razones para usar la integral de Lebesgue (en vez de la integral de Riemann)

- En varios ejemplos, los dominios de funciones no tienen una estructura buena y no se identifican fácilmente con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.
  En estos casos la integral de Riemann no está definida.
- Hay funciones que no son Riemann-integrables, pero son Lebesgue-integrables.
- En la teoría de la integral de Lebesgue hay herramientas más poderosas (por ejemplo, los teoremas de convergencia).

Razones para usar la integral de Lebesgue (en vez de la integral de Riemann)

- En varios ejemplos, los dominios de funciones no tienen una estructura buena y no se identifican fácilmente con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.
  En estos casos la integral de Riemann no está definida.
- Hay funciones que no son Riemann-integrables, pero son Lebesgue-integrables.
- En la teoría de la integral de Lebesgue hay herramientas más poderosas (por ejemplo, los teoremas de convergencia).
- Los espacios $L^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ son completos.

Una aplicación importante: espacios de funciones p-integrables

Para $p \in [1, +\infty)$,

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Los espacios $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ son completos.

Varios objetos de estudio de la mecánica cuántica se pueden identificar con operadores lineales (no acotados) en $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.