Teoremas del valor medio para integrales de productos (un tema de análisis real)

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2021-12-10

Objetivo: demostrar teoremas del valor medio para integrales de la forma

$$\int_a^b fg,$$

donde f es monótona y g es compleja.

Objetivo: demostrar teoremas del valor medio para integrales de la forma

$$\int_a^b fg,$$

donde f es monótona y g es compleja.

Prerrequisitos:

- el criterio del intervalo,
- la transformada de Abel para sumas de productos,
- la parte entera y sus propiedades.

Contenido

El criterio del intervalo

Proposición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que A tiene una de las formas

$$[a, b], \qquad (a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b);$$

(b) para cada x, y en A, $\quad [x, y] \subseteq A$;

(c) $(\inf(A), \sup(A)) \subseteq A$.

La transformada de Abel para sumas de productos (un caso particular)

Proposición

$$\sum_{k=1}^{m} v_k(u_k - u_{k-1}) = v_m u_m - v_1 u_0 + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) u_k.$$

La transformada de Abel para sumas de productos (un caso particular)

Proposición

$$\sum_{k=1}^{m} v_k(u_k - u_{k-1}) = v_m u_m - v_1 u_0 + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) u_k.$$

Demostración.

$$\sum_{k=1}^{m} v_k(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} v_k u_k - \sum_{j=1}^{m} v_j u_{j-1} = v_m u_m + \sum_{k=1}^{m-1} v_k u_k - \sum_{j=2}^{m} v_j u_{j-1} - v_1 u_0$$

$$= v_m u_m - v_1 u_0 + \sum_{k=1}^{m-1} v_k u_k - \sum_{k=1}^{m-1} v_{k+1} u_k. \qquad \square$$

Contenido

Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $x, y \in f^{-1}[B]$, esto es, $f(x), f(y) \in B$.

Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $x, y \in f^{-1}[B]$, esto es, $f(x), f(y) \in B$. Demostremos que $[x, y] \subseteq f^{-1}[B]$.

Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$.
Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $x, y \in f^{-1}[B]$, esto es, $f(x), f(y) \in B$.
Demostremos que $[x, y] \subseteq f^{-1}[B]$.
Sea $z \in (x, y)$. Como f es decreciente,

Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$.
Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $x, y \in f^{-1}[B]$, esto es, $f(x), f(y) \in B$.
Demostremos que $[x, y] \subseteq f^{-1}[B]$.
Sea $z \in (x, y)$. Como f es decreciente,

$$f(x) \geq f(z) \geq f(y).$$

Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $x, y \in f^{-1}[B]$, esto es, $f(x), f(y) \in B$.
Demostremos que $[x, y] \subseteq f^{-1}[B]$.
Sea $z \in (x, y)$. Como f es decreciente,

$$f(x) \geq f(z) \geq f(y).$$

Luego

$$f(z) \in [f(y), f(x)]$$

Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$.
Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $x, y \in f^{-1}[B]$, esto es, $f(x), f(y) \in B$.
Demostremos que $[x, y] \subseteq f^{-1}[B]$.
Sea $z \in (x, y)$. Como f es decreciente,

$$f(x) \geq f(z) \geq f(y).$$

Luego

$$f(z) \in [f(y), f(x)] \subseteq$$

Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $x, y \in f^{-1}[B]$, esto es, $f(x), f(y) \in B$.
Demostremos que $[x, y] \subseteq f^{-1}[B]$.
Sea $z \in (x, y)$. Como f es decreciente,

$$f(x) \geq f(z) \geq f(y).$$

Luego

$$f(z) \in [f(y), f(x)] \subseteq B.$$

Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$.
Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $x, y \in f^{-1}[B]$, esto es, $f(x), f(y) \in B$.
Demostremos que $[x, y] \subseteq f^{-1}[B]$.
Sea $z \in (x, y)$. Como f es decreciente,

$$f(x) \geq f(z) \geq f(y).$$

Luego

$$f(z) \in [f(y), f(x)] \subseteq B.$$

Por la definición de la preimagen,

Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $x, y \in f^{-1}[B]$, esto es, $f(x), f(y) \in B$.
Demostremos que $[x, y] \subseteq f^{-1}[B]$.
Sea $z \in (x, y)$. Como f es decreciente,

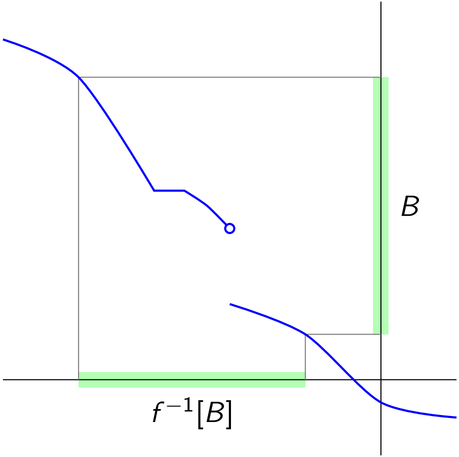
$$f(x) \geq f(z) \geq f(y).$$

Luego

$$f(z) \in [f(y), f(x)] \subseteq B.$$

Por la definición de la preimagen, $z \in f^{-1}[B]$. $\square$

Dibujo: la preimagen de un intervalo respecto a una función decreciente



Teorema (aproximación uniforme de funciones decrecientes por funciones numerablemente escalonadas)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente en A, $n \in \mathbb{N}$.

Entonces existe una función “numerablemente escalonada” $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k 1_{J_k},$$

donde $(J_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de intervalos disjuntos a pares cuya unión es A, tal que:

1) la restricción $\varphi|_A$ es una función decreciente,
2) $\forall x \in A \qquad 0 \le f(x) - \varphi(x) < \frac{1}{n}$,
3) $\varphi \ge 0$, si $f \ge 0$.

Idea de demostración. Pongamos

$$J_k := \left\{ x \in A\colon\ \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n} \right\},$$

Idea de demostración. Pongamos

$$J_k := \left\{ x \in A\colon\ \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}, \qquad v_k := \frac{k}{n},$$

Idea de demostración. Pongamos

$$J_k := \left\{ x \in A\colon\ \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}, \qquad v_k := \frac{k}{n}, \qquad \varphi := \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k 1_{J_k}.$$

Idea de demostración. Pongamos

$$J_k := \left\{ x \in A \colon \; \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}, \qquad v_k := \frac{k}{n}, \qquad \varphi := \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k 1_{J_k}.$$

En otras palabras,

$$\varphi(x) :=$$

Idea de demostración. Pongamos

$$J_k := \left\{ x \in A\colon\ \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}, \qquad v_k := \frac{k}{n}, \qquad \varphi := \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k 1_{J_k}.$$

En otras palabras,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor nf(x) \rfloor}{n}, & x \in A; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

Por el lema sobre las preimágenes de intervalos bajo una función monótona, para cada k en $\mathbb{Z}$ el conjunto J_k es un intervalo de $\mathbb{R}$. $\square$

Corolario (aproximación uniforme de funciones decrecientes positivas en un intervalo compacto por funciones escalonadas)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A = [a, b]$,

$f\colon A \to [0, +\infty)$ una función decreciente, $n \in \mathbb{N}$.

Entonces existe una función escalonada $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nula fuera de A y tal que:

1) la restricción $\varphi|_A$ es decreciente,
2) $\forall x \in A \qquad 0 \le f(x) - \varphi(x) < \frac{1}{n}$,
3) $\forall x \in A \qquad \varphi(x) \ge 0$.

Corolario (aproximación uniforme de funciones decrecientes positivas en un intervalo compacto por funciones escalonadas)

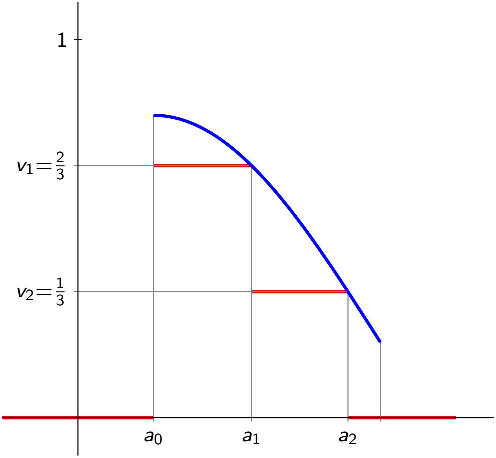
Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A = [a, b]$,
$f\colon A \to [0, +\infty)$ una función decreciente, $n \in \mathbb{N}$.
Entonces existe una función escalonada $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nula fuera de A y tal que:

1) la restricción $\varphi|_A$ es decreciente,
2) $\forall x \in A \qquad 0 \le f(x) - \varphi(x) < \frac{1}{n}$,
3) $\forall x \in A \qquad \varphi(x) \ge 0$.

Notemos que φ es de la forma $\displaystyle \varphi = \sum_{k=1}^{m} v_k 1_{J_k}$,

donde $(a_{k-1}, a_k) \subseteq J_k \subseteq [a_{k-1}, a_k]$, $\quad a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m = b$.

Dibujo: aproximación de una función decreciente en un intervalo compacto



Proposición (las funciones monótonas son medibles y localmente integrables)

Sea A un intervalo y sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces:

1) f es medible,
2) f es acotada en todo subintervalo compacto de A,
3) f es integrable en todo subintervalo compacto de A.

Contenido

Teorema del valor medio para la integral del producto de una función decreciente por una función compleja

Sea $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$ una función decreciente y sea $g \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Entonces $fg \in L^1([a,b],\mathbb{C})$ y

$$\left|\int_a^b fg\right| \le f(a) \max_{a \le x \le b} \left|\int_a^x g\right|.$$

Inicio de la demostración: notación.

Definimos $G\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$G(x) := \int_a^x g.$$

Inicio de la demostración: notación.

Definimos $G\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$G(x) := \int_a^x g.$$

Entonces $G \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$.

Inicio de la demostración: notación.

Definimos $G\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$G(x) := \int_a^x g.$$

Entonces $G \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$. En particular, G es

Inicio de la demostración: notación.

Definimos $G\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$G(x) := \int_a^x g.$$

Entonces $G \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$. En particular, G es continua y acotada.

Inicio de la demostración: notación.

Definimos $G\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$G(x) := \int_a^x g.$$

Entonces $G \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$. En particular, G es continua y acotada.

Pongamos

$$K := \max_{a \le x \le b} |G(x)|.$$

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Consideremos un caso particular cuando f es escalonada.

Supongamos que

$$f = \sum_{k=1}^{m} v_k 1_{J_k},$$

donde $(a_{k-1}, a_k) \subseteq J_k \subseteq [a_{k-1}, a_k]$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$.

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Consideremos un caso particular cuando f es escalonada.

Supongamos que

$$f = \sum_{k=1}^{m} v_k 1_{J_k},$$

donde $(a_{k-1}, a_k) \subseteq J_k \subseteq [a_{k-1}, a_k]$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$.

Entonces

$$\int_a^b fg =$$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Consideremos un caso particular cuando f es escalonada.

Supongamos que

$$f = \sum_{k=1}^{m} v_k 1_{J_k},$$

donde $(a_{k-1}, a_k) \subseteq J_k \subseteq [a_{k-1}, a_k]$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$.

Entonces

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} 1_{J_k}\, g =$$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Consideremos un caso particular cuando f es escalonada.

Supongamos que

$$f = \sum_{k=1}^{m} v_k 1_{J_k},$$

donde $(a_{k-1}, a_k) \subseteq J_k \subseteq [a_{k-1}, a_k]$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$.

Entonces

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} 1_{J_k}\, g = \sum_{k=1}^{m} v_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} g =$$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Consideremos un caso particular cuando f es escalonada.

Supongamos que

$$f = \sum_{k=1}^{m} v_k 1_{J_k},$$

donde $(a_{k-1}, a_k) \subseteq J_k \subseteq [a_{k-1}, a_k]$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$.

Entonces

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} 1_{J_k}\, g = \sum_{k=1}^{m} v_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} g = \sum_{k=1}^{m} v_k (G(a_k) - G(a_{k-1})).$$

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Aplicamos la transformada de Abel a la suma obtenida:

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k(G(a_k) - G(a_{k-1})) =$$

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Aplicamos la transformada de Abel a la suma obtenida:

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k(G(a_k) - G(a_{k-1})) = \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_k) - \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_{k-1})$$

$$=$$

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Aplicamos la transformada de Abel a la suma obtenida:

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k(G(a_k) - G(a_{k-1})) = \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_k) - \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_{k-1})$$

$$= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} v_k G(a_k) - \sum_{k=2}^{m} v_k G(a_{k-1}) - v_1 G(a_0)$$

$$=$$

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Aplicamos la transformada de Abel a la suma obtenida:

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k\big(G(a_k) - G(a_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_k) - \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_{k-1})$$

$$= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} v_k G(a_k) - \sum_{k=2}^{m} v_k G(a_{k-1}) - v_1 G(a_0)$$

$$= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) G(a_k).$$

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Aplicamos la transformada de Abel a la suma obtenida:

$$\begin{aligned}\int_a^b fg &= \sum_{k=1}^{m} v_k\big(G(a_k) - G(a_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_k) - \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_{k-1})\\ &= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} v_k G(a_k) - \sum_{k=2}^{m} v_k G(a_{k-1}) - v_1 G(a_0)\\ &= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) G(a_k).\end{aligned}$$

Luego $\left|\int_a^b fg\right|$ $\Rightarrow$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Aplicamos la transformada de Abel a la suma obtenida:

$$\begin{aligned}\int_a^b fg &= \sum_{k=1}^{m} v_k(G(a_k) - G(a_{k-1})) = \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_k) - \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_{k-1}) \\ &= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} v_k G(a_k) - \sum_{k=2}^{m} v_k G(a_{k-1}) - v_1 G(a_0) \\ &= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) G(a_k).\end{aligned}$$

Luego $\quad \left| \int_a^b fg \right| \leq$ $\Rightarrow$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Aplicamos la transformada de Abel a la suma obtenida:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b fg &= \sum_{k=1}^{m} v_k\big(G(a_k) - G(a_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_k) - \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_{k-1}) \\
&= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} v_k G(a_k) - \sum_{k=2}^{m} v_k G(a_{k-1}) - v_1 G(a_0) \\
&= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) G(a_k).
\end{aligned}
$$

Luego $$\left|\int_a^b fg\right| \le K\left(v_m + \sum_{k=1}^{m-1}(v_k - v_{k+1})\right) \qquad \Rightarrow$$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Aplicamos la transformada de Abel a la suma obtenida:

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k(G(a_k) - G(a_{k-1})) = \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_k) - \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_{k-1})$$

$$= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} v_k G(a_k) - \sum_{k=2}^{m} v_k G(a_{k-1}) - v_1 G(a_0)$$

$$= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) G(a_k).$$

Luego $\left|\int_a^b fg\right| \le K\left(v_m + \sum_{k=1}^{m-1}(v_k - v_{k+1})\right) =$ $\Rightarrow$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Aplicamos la transformada de Abel a la suma obtenida:

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k(G(a_k) - G(a_{k-1})) = \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_k) - \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_{k-1})$$

$$= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} v_k G(a_k) - \sum_{k=2}^{m} v_k G(a_{k-1}) - v_1 G(a_0)$$

$$= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) G(a_k).$$

Luego $\left|\int_a^b fg\right| \leq K\left(v_m + \sum_{k=1}^{m-1}(v_k - v_{k+1})\right) = Kv_1 = Kf(a)$ $\Rightarrow$

Continuación de la demostración: el caso cuando f es escalonada.

Aplicamos la transformada de Abel a la suma obtenida:

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k(G(a_k) - G(a_{k-1})) = \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_k) - \sum_{k=1}^{m} v_k G(a_{k-1})$$

$$= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} v_k G(a_k) - \sum_{k=2}^{m} v_k G(a_{k-1}) - v_1 G(a_0)$$

$$= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) G(a_k).$$

Luego $\displaystyle \left| \int_a^b fg \right| \le K \left(v_m + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) \right) = K v_1 = K f(a) .$ $\Rightarrow$

Final de la demostración.

Consideremos el caso general: f es decreciente, pero no necesariamente escalonada.

Final de la demostración.

Consideremos el caso general: f es decreciente, pero no necesariamente escalonada.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos una función φ escalonada y decreciente en $[a, b]$, tal que

$$0 \leq \varphi \leq f, \qquad \|f - \varphi\|_{\mathsf{sup}} < \varepsilon.$$

Final de la demostración.

Consideremos el caso general: f es decreciente, pero no necesariamente escalonada.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos una función φ escalonada y decreciente en $[a, b]$, tal que

$$0 \leq \varphi \leq f, \qquad \|f - \varphi\|_{\sup} < \varepsilon.$$

Entonces

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left| \int_a^b (f - \varphi)g \right| + \left| \int_a^b \varphi g \right| \leq$$

Final de la demostración.

Consideremos el caso general: f es decreciente, pero no necesariamente escalonada.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos una función φ escalonada y decreciente en $[a, b]$, tal que

$$0 \leq \varphi \leq f, \qquad \|f - \varphi\|_{\sup} < \varepsilon.$$

Entonces

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left|\int_a^b (f - \varphi)g\right| + \left|\int_a^b \varphi g\right| \leq \varepsilon\|g\|_1 + \varphi(a)K \leq \varepsilon\|g\|_1 + f(a)K.$$

Final de la demostración.

Consideremos el caso general: f es decreciente, pero no necesariamente escalonada.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos una función φ escalonada y decreciente en $[a, b]$, tal que

$$0 \le \varphi \le f, \qquad \|f - \varphi\|_{\sup} < \varepsilon.$$

Entonces

$$\left| \int_a^b fg \right| \le \left| \int_a^b (f - \varphi) g \right| + \left| \int_a^b \varphi g \right| \le \varepsilon \|g\|_1 + \varphi(a) K \le \varepsilon \|g\|_1 + f(a) K.$$

Como ε es arbitrario, obtenemos la estimación requerida. $\square$

Problema

Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema,
y además g toma valores reales, esto es, $g \in L^1([a,b],\mathbb{R})$.
Demostrar que existe ξ en $[a,b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g.$$

El segundo teorema del valor medio de Bonnet para la integral del producto de una función monótona por una función compleja

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona en $[a,b]$ y sea $g \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Entonces

$$\left| \int_a^b fg \right| \le \left(|f(a)| + 2|f(b)| \right) \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^x g \right|.$$

Demostración para f decreciente.

Supongamos que f es decreciente.

Demostración para f decreciente.

Supongamos que f es decreciente.

Notamos que $f = (f - f(b)) + f(b)$ y

$$\left| \int_a^b fg \right| \le \left| \int_a^b (f - f(b))g \right| + \left| \int_a^b f(b)g \right| .$$

Demostración para f decreciente.

Supongamos que f es decreciente.

Notamos que $f = (f - f(b)) + f(b)$ y

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left|\int_a^b (f - f(b))g\right| + \left|\int_a^b f(b)g\right|.$$

Aplicamos el teorema anterior a las funciones $f - f(b)$ y g.

Demostración para f decreciente.

Supongamos que f es decreciente.

Notamos que $f = (f - f(b)) + f(b)$ y

$$\left| \int_a^b fg \right| \le \left| \int_a^b (f - f(b))g \right| + \left| \int_a^b f(b)g \right|.$$

Aplicamos el teorema anterior a las funciones $f - f(b)$ y g.

$$\left| \int_a^b fg \right| \le K(f(a) - f(b)) + K|f(b)| \le K(|f(a)| + 2|f(b)|).$$

$\Rightarrow$

Demostración para f creciente.

Notamos que

$$-f = (f(b) - f) - f(b).$$

Demostración para f creciente.

Notamos que

$$-f = (f(b) - f) - f(b).$$

La función $f(b) - f$ es decreciente y positiva.

Demostración para f creciente.

Notamos que

$$-f = (f(b) - f) - f(b).$$

La función $f(b) - f$ es decreciente y positiva.

$$\left|\int_a^b fg\right| = \left|\int_a^b (-f)g\right| \leq \left|\int_a^b (f(b) - f)g\right| + \left|\int_a^b f(b)g\right|.$$

Demostración para f creciente.

Notamos que

$$-f = (f(b) - f) - f(b).$$

La función $f(b) - f$ es decreciente y positiva.

$$\left|\int_a^b fg\right| = \left|\int_a^b (-f)g\right| \leq \left|\int_a^b (f(b) - f)g\right| + \left|\int_a^b f(b)g\right|.$$

Aplicamos el teorema anterior a las funciones $f(b) - f$ y g.

Demostración para f creciente.

Notamos que

$$-f = (f(b) - f) - f(b).$$

La función $f(b) - f$ es decreciente y positiva.

$$\left|\int_a^b fg\right| = \left|\int_a^b (-f)g\right| \le \left|\int_a^b (f(b) - f)g\right| + \left|\int_a^b f(b)g\right|.$$

Aplicamos el teorema anterior a las funciones $f(b) - f$ y g.

$$\left|\int_a^b fg\right| \le K(f(b) - f(a)) + K|f(b)| \le K(|f(a)| + 2|f(b)|).$$

$\square$

Contenido

Problema: el teorema del valor medio para la integral del producto de una función monótona por una función real

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona y sea $g \in L^1([a,b],\mathbb{R})$.
Demostrar que existe ξ en $[a,b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^{\xi} g + f(b)\int_{\xi}^{b} g.$$

Ejercicio

Calcular la integral $\int_a^b fg$, donde

$$a = 0, \quad b = 2\pi, \quad f(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{sen}(x).$$

Verificar la desigualdad

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq (|f(a)| + 2|f(b)|) \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^x g \right|.$$

Hallar ξ en la igualdad

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g + f(b) \int_\xi^b g.$$

Ejercicio

Calcular la integral $\int_a^b fg$, donde

$$a = 0, \quad b = 2\pi, \quad f(x) = x, \quad g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}.$$

Verificar la desigualdad

$$\left| \int_a^b fg \right| \le (|f(a)| + 2|f(b)|) \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^x g \right|.$$

Mini-tarea adicional: el caso de una igualdad en el segundo teorema del valor medio de Bonnet para el producto de una función monótona por una función compleja

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona en $[a,b]$ y sea $g \in L^1([a,b],\mathbb{C})$.

Encontrar una condición necesaria y suficiente para que

$$\left| \int_a^b fg \right| = (|f(a)| + 2|f(b)|) \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^x g \right|.$$