Límites superiores e inferiores de funciones (un tema de análisis)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

22 de octubre de 2024

Definición

En esta presentación nos restringimos a la situación,
cuando A es un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$, $x\in\operatorname{clos}(A)$.

$$\limsup_{t\to x} f(t) \;:=\; \inf_{\delta>0}\ \sup_{t\in A\cap(x-\delta,x+\delta)\setminus\{x\}} f(t),$$

$$\liminf_{t\to x} f(t) := \sup_{\delta>0}\ \inf_{t\in A\cap(x-\delta,x+\delta)\setminus\{x\}} f(t).$$

De manera similar,

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) \;:=\; \inf_{\delta>0}\ \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

Ejercicio. Escribir definiciones de $\liminf\limits_{t\to x^-} f(t)$, etc.

Otra forma equivalente, con límites

Proposición

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $\inf(A) \leq x < \sup(A)$. Entonces

$$\limsup_{t \to x^+} f(t) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Otra forma equivalente, con límites

Proposición

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $\inf(A) \le x < \sup(A)$. Entonces

$$\limsup_{t \to x^+} f(t) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Demostración. Para cada $\delta > 0$, definimos $g(\delta) := \sup\limits_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t)$.

Otra forma equivalente, con límites

Proposición

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $\quad f\colon A \to \mathbb{R}$, $\quad \inf(A) \le x < \sup(A)$. $\quad$ Entonces

$$\limsup_{t \to x^+} f(t) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Demostración. Para cada $\delta > 0$, definimos $\quad g(\delta) := \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$

La función g es creciente.

Otra forma equivalente, con límites

Proposición

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $\inf(A) \le x < \sup(A)$. Entonces

$$\limsup_{t \to x^+} f(t) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Demostración. Para cada $\delta > 0$, definimos $g(\delta) := \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t)$.

La función g es creciente. Luego

$$\inf_{\delta > 0} g(\delta) = \lim_{\delta \to 0^+} g(\delta).$$

Otra forma equivalente, con límites

Proposición

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $\inf(A) \le x < \sup(A)$. Entonces

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

Demostración. Para cada $\delta > 0$, definimos $g(\delta) := \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$

La función g es creciente. Luego

$$\inf_{\delta>0} g(\delta) = \lim_{\delta\to 0^+} g(\delta).$$

Al sustituir la definición de g, obtenemos el resultado deseado. $\square$

Ejercicio simple. Demostrar que

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

Ejercicio simple. Demostrar que

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

Ejercicio simple. Demostrar que

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) \leq \limsup_{t\to x^+} f(t).$$

Ejercicio simple. Demostrar que

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

Ejercicio simple. Demostrar que

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) \le \limsup_{t\to x^+} f(t).$$

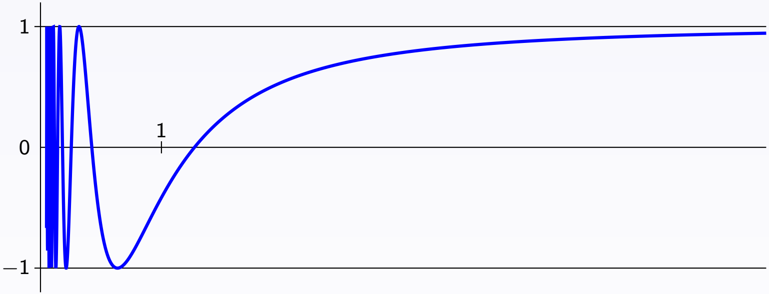
Ejercicio muy bueno. Demostrar que

$$\lim_{t\to x^+} f(t) = v \qquad \Longleftrightarrow \qquad \liminf_{t\to x^+} f(t) = \limsup_{t\to x^+} f(t) = v.$$

Ejemplo

$f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos\frac{2}{x}$.

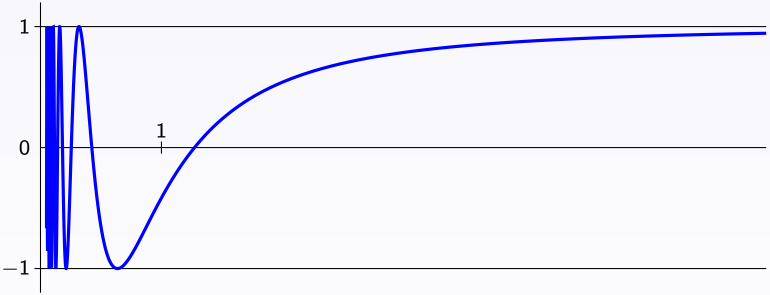
La gráfica no se puede dibujar bien cerca de $x = 0$.



Ejemplo

$f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \cos \frac{2}{x}$.

La gráfica no se puede dibujar bien cerca de $x = 0$.



Calculemos $\liminf_{x \to 0^+} f(x)$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $\quad g(\delta) := \inf_{x \in (0,\delta)} f(x) = \inf_{x \in (0,\delta)} \cos \frac{2}{x}.$

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $\quad g(\delta) := \inf_{x\in(0,\delta)} f(x) = \inf_{x\in(0,\delta)} \cos\dfrac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos\frac{2}{x} \geq -1$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $\quad g(\delta) := \inf_{x \in (0,\delta)} f(x) = \inf_{x \in (0,\delta)} \cos \dfrac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesion $\quad \boxed{t_k := \dfrac{2}{(2k+1)\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $\quad g(\delta) := \inf\limits_{x\in(0,\delta)} f(x) = \inf\limits_{x\in(0,\delta)} \cos\dfrac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos\frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesion $\quad \boxed{t_k := \dfrac{2}{(2k+1)\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}$.

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $\quad f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $\quad g(\delta) := \inf_{x\in(0,\delta)} f(x) = \inf_{x\in(0,\delta)} \cos\dfrac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos\frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesion $\quad t_k := \dfrac{2}{(2k+1)\pi}, \quad k \in \mathbb{N}$.

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $\quad f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1$.

Pongamos $m := \lfloor\frac{1}{\pi\delta}\rfloor + 1$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $\quad g(\delta) := \inf_{x\in(0,\delta)} f(x) = \inf_{x\in(0,\delta)} \cos\dfrac{2}{x}.$

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos\frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesion $\quad t_k := \dfrac{2}{(2k+1)\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $\quad f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1.$

Pongamos $m := \lfloor \frac{1}{\pi\delta} \rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0, \delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta},$$

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $\quad g(\delta) := \inf_{x\in(0,\delta)} f(x) = \inf_{x\in(0,\delta)} \cos\frac{2}{x}.$

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos\frac{2}{x} \geq -1.$

Por otro lado, consideremos la sucesion $\quad \boxed{t_k := \frac{2}{(2k+1)\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}.$

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $\quad f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1.$

Pongamos $m := \lfloor \frac{1}{\pi\delta} \rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0, \delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta}, \qquad t_m = \frac{2}{(2m+1)\pi} < \frac{1}{m\pi} < \delta.$$

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $\quad g(\delta) := \inf\limits_{x\in(0,\delta)} f(x) = \inf\limits_{x\in(0,\delta)} \cos\dfrac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos\frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesion $\quad \boxed{t_k := \dfrac{2}{(2k+1)\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}$.

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $\quad f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1$.

Pongamos $m := \lfloor\frac{1}{\pi\delta}\rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0,\delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta}, \qquad t_m = \frac{2}{(2m+1)\pi} < \frac{1}{m\pi} < \delta.$$

Luego $g(\delta) = -1$ para cada $\delta > 0$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $\quad g(\delta) := \inf_{x \in (0,\delta)} f(x) = \inf_{x \in (0,\delta)} \cos \dfrac{2}{x}.$

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesion $\quad \boxed{t_k := \dfrac{2}{(2k+1)\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}.$

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $\quad f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1.$

Pongamos $m := \lfloor \frac{1}{\pi\delta} \rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0, \delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta}, \qquad t_m = \frac{2}{(2m+1)\pi} < \frac{1}{m\pi} < \delta.$$

Luego $g(\delta) = -1$ para cada $\delta > 0$. $\quad$ Conclusión final:

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $\quad g(\delta) := \inf_{x \in (0,\delta)} f(x) = \inf_{x \in (0,\delta)} \cos\dfrac{2}{x}.$

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos\frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesion $\quad \boxed{t_k := \dfrac{2}{(2k+1)\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}.$

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $\quad f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1.$

Pongamos $m := \lfloor \frac{1}{\pi\delta} \rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0,\delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta}, \qquad t_m = \frac{2}{(2m+1)\pi} < \frac{1}{m\pi} < \delta.$$

Luego $g(\delta) = -1$ para cada $\delta > 0$. $\quad$ Conclusión final: $\quad \liminf_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} (-1) = -1.$