Límites de funciones monótonas
(un tema del curso "Análisis real")

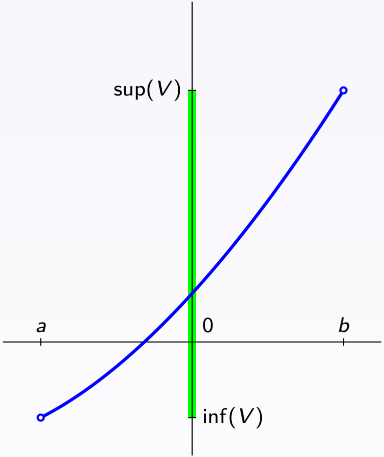
Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

4 de marzo de 2021

Límites de una función creciente en los extremos de un intervalo



Proposición 1. Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$, $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función creciente,

$$V := f[(a, b)].$$

Entonces

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = \inf(V), \tag{1}$$

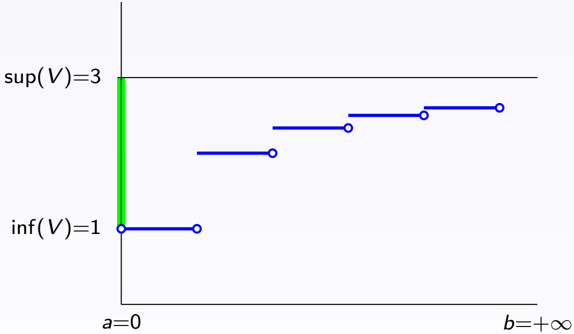
$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} f(x) = \sup(V). \tag{2}$$

En la proposición anterior f puede tener discontinuidades,

En la proposición anterior f puede tener discontinuidades, puede ser constante en algunas partes del dominio.

En la proposición anterior f puede tener discontinuidades,
puede ser constante en algunas partes del dominio.
Las cantidades a, b, $\inf(V)$, $\sup(V)$ pueden ser finitas o infinitas.

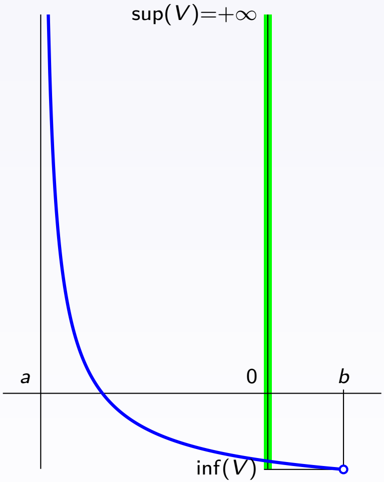
En la proposición anterior f puede tener discontinuidades,
puede ser constante en algunas partes del dominio.
Las cantidades a, b, $\inf(V)$, $\sup(V)$ pueden ser finitas o infinitas.



$$(a, b) = (0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{3\lfloor x \rfloor + 1}{\lfloor x \rfloor + 1}$$

Límites de una función decreciente en los extremos de un intervalo



Proposición 2. Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función decreciente,

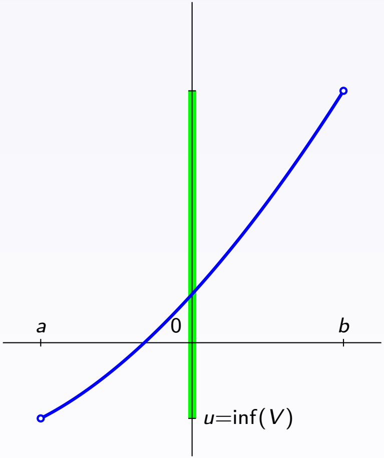
$$V := f[(a, b)].$$

Entonces

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = \sup(V), \tag{3}$$

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} f(x) = \inf(V). \tag{4}$$

Demostración para un caso

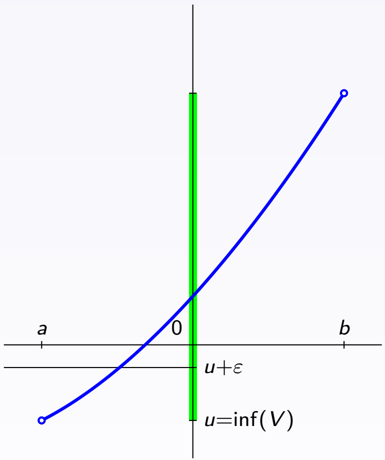


Supongamos que f crece, $a \in \mathbb{R}$, $u := \inf(V) \in \mathbb{R}$.

Demostremos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = u.$$

Demostración para un caso



Supongamos que f crece, $a \in \mathbb{R}$, $u := \inf(V) \in \mathbb{R}$.

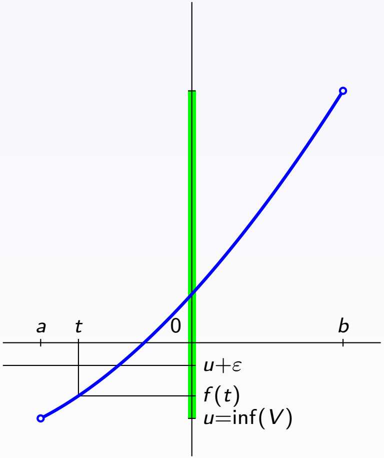
Demostremos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = u.$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Entonces $\inf(V) + \varepsilon$ no es cota inferior de V.

Demostración para un caso



Supongamos que f crece, $a \in \mathbb{R}$, $u := \inf(V) \in \mathbb{R}$.

Demostremos que

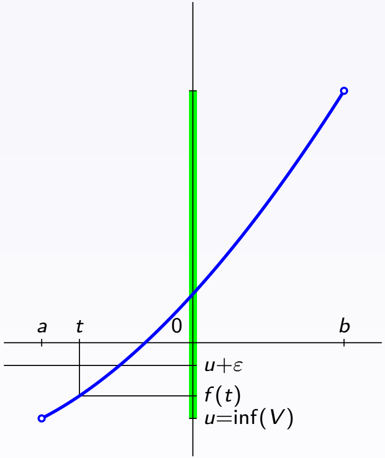
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = u.$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Entonces $\inf(V) + \varepsilon$ no es cota inferior de V.

Encontramos $t \in (a, b)$ tal que $f(t) < u + \varepsilon$.

Demostración para un caso



Supongamos que f crece, $a \in \mathbb{R}$, $u := \inf(V) \in \mathbb{R}$.

Demostremos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = u.$$

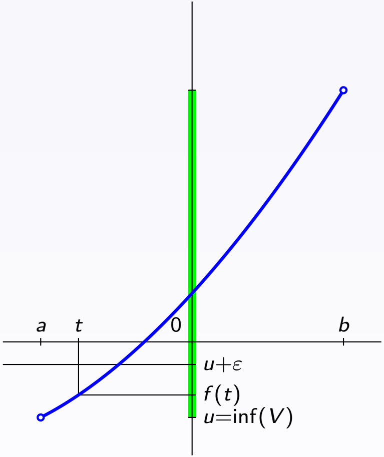
Sea $\varepsilon > 0$.

Entonces $\inf(V) + \varepsilon$ no es cota inferior de V.

Encontramos $t \in (a, b)$ tal que $f(t) < u + \varepsilon$.

Pongamos $\delta := t - a$.

Demostración para un caso



Supongamos que f crece, $a \in \mathbb{R}$, $u := \inf(V) \in \mathbb{R}$.

Demostremos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = u.$$

Sea $\varepsilon > 0$.

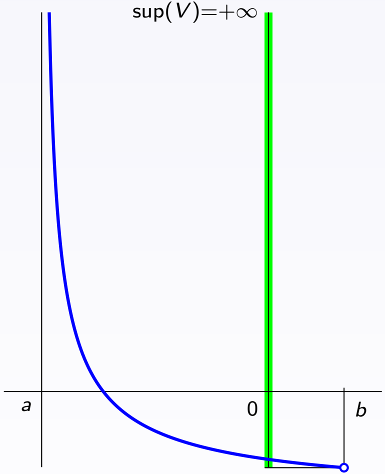
Entonces $\inf(V) + \varepsilon$ no es cota inferior de V.

Encontramos $t \in (a, b)$ tal que $f(t) < u + \varepsilon$.

Pongamos $\delta := t - a$. Para cada x en $(a, a + \delta)$,

$$u - \varepsilon < u \leq f(x) \leq f(a + \delta) = f(t) < u + \varepsilon.$$

Demostración para un caso más

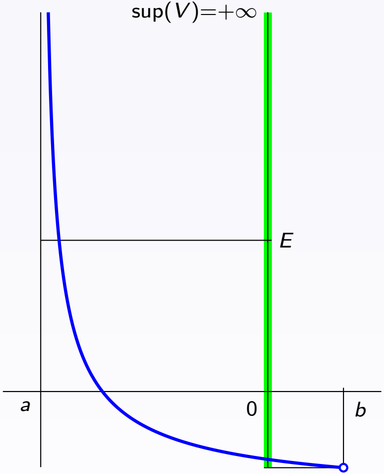


Supongamos que f decrece, $a \in \mathbb{R}$, $\sup(V) = +\infty$.

Demostremos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = +\infty.$$

Demostración para un caso más



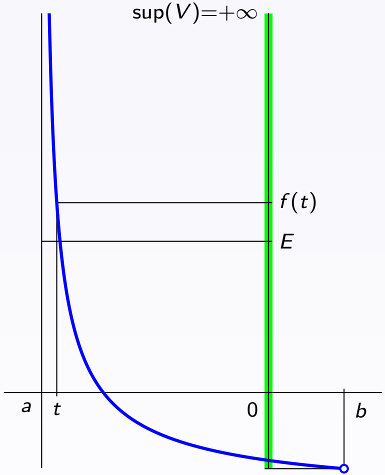
Supongamos que f decrece, $a \in \mathbb{R}$, $\sup(V) = +\infty$.

Demostremos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = +\infty.$$

Sea $E > 0$.

Demostración para un caso más



Supongamos que f decrece, $a \in \mathbb{R}$, $\sup(V) = +\infty$.

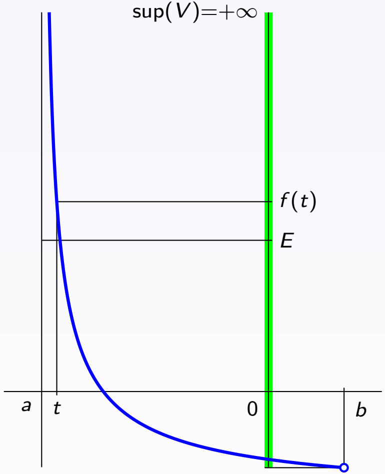
Demostremos que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in(a,b)}} f(x) = +\infty.$$

Sea $E > 0$.

Entonces E no es cota superior de V.

Demostración para un caso más



Supongamos que f decrece, $a \in \mathbb{R}$, $\sup(V) = +\infty$.

Demostremos que

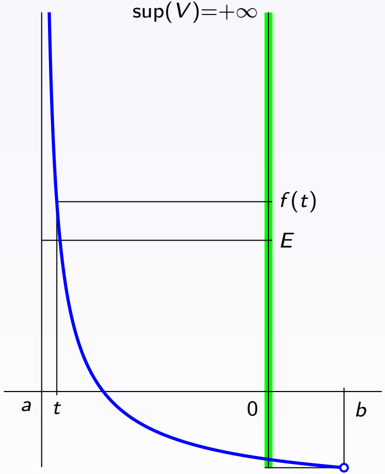
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = +\infty.$$

Sea $E > 0$.

Entonces E no es cota superior de V.

Encontramos $t \in (a, b)$ tal que $f(t) > E$.

Demostración para un caso más



Supongamos que f decrece, $a \in \mathbb{R}$, $\sup(V) = +\infty$.

Demostremos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = +\infty.$$

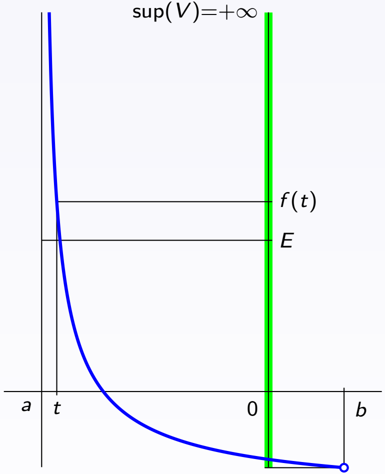
Sea $E > 0$.

Entonces E no es cota superior de V.

Encontramos $t \in (a, b)$ tal que $f(t) > E$.

Pongamos $\delta := t - a$.

Demostración para un caso más



Supongamos que f decrece, $a \in \mathbb{R}$, $\sup(V) = +\infty$.

Demostremos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = +\infty.$$

Sea $E > 0$.

Entonces E no es cota superior de V.

Encontramos $t \in (a, b)$ tal que $f(t) > E$.

Pongamos $\delta := t - a$.

Para cada x en $(a, a + \delta)$,

$$f(x) \geq f(a + \delta) = f(t) > E.$$

Ejercicios: discontinuidades de una función creciente

Ejercicio 1. Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x \in \operatorname{int}(A)$. Explicar por qué existen los límites

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} f(t), \qquad \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} f(t).$$

Estos límites se denotan por $f(x^+)$ y $f(x^-)$, respectivamente.

Ejercicios: discontinuidades de una función creciente

Ejercicio 1. Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x \in \operatorname{int}(A)$. Explicar por qué existen los límites

$$\lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t), \qquad \lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t).$$

Estos límites se denotan por $f(x^+)$ y $f(x^-)$, respectivamente.

Ejercicio 2. En la situación del ejercicio anterior, demostrar que

$$f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+).$$

Ejercicios: discontinuidades de una función creciente

Ejercicio 3. Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x, y \in A$, $x < y$. Demostrar que

$$f(x^+) \leq f(y^-).$$

Sugerencia: puede servir un punto intermedio entre x, y.

Ejercicios: discontinuidades de una función creciente

Ejercicio 3. Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x, y \in A$, $x < y$. Demostrar que

$$f(x^+) \leq f(y^-).$$

Sugerencia: puede servir un punto intermedio entre x, y.

Ejercicio 4. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, sean $a < x_1 < \ldots < x_n < b$. Demuestre que

$$\sum_{j=1}^{n} (f(x_j^+) - f(x_j^-)) \leq f(b) - f(a).$$

Ejercicios: discontinuidades de una función creciente

Ejercicio 5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, y sea $h > 0$.
Consideremos el conjunto de los saltos de f de altura $\geq h$:

$$S_h := \{x \in (a, b) : \; f(x^+) - f(x^-) \geq h\}.$$

Demuestre que S_h es finito.

Ejercicios: discontinuidades de una función creciente

Ejercicio 5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, y sea $h > 0$.
Consideremos el conjunto de los saltos de f de altura $\geq h$:

$$S_h \coloneqq \{x \in (a,b)\colon\ f(x^+) - f(x^-) \geq h\}.$$

Demuestre que S_h es finito.

Ejercicio 6. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente.
Consideremos el conjunto de los saltos de f:

$$S \coloneqq \{x \in (a,b)\colon\ f(x^+) - f(x^-) > 0\}.$$

Demuestre que S es finito o numerable.