El límite de una función monótona a través del límite de una sucesión (un tema de Análisis Real)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

8 de mayo de 2020

Objetivos:

expresar el límite de una función monótona como el límite de una sucesión.

Prerrequisitos:

supremos e ínfimos, límites de funciones monótonas.

Una de las aplicaciones:

calcular integrales impropias con ayuda del teorema de convergencia monótona.

Proposición (el límite de una función creciente en términos del límite de una sucesión)

Sean

$$-\infty \le a < b \le +\infty,$$

$\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función creciente,

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (a,b) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \lim_{t\to b^-} \varphi(t).$$

Proposición (el límite de una función creciente en términos del límite de una sucesión)

Sean

$$-\infty \le a < b \le +\infty,$$

$\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función creciente,

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (a,b) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \lim_{t\to b^-} \varphi(t).$$

Ejercicio. Recordar el criterio de límite en términos de sucesiones (teorema de Heine) y mostrar que la proposición escrita arriba es un corolario de este teorema.

Proposición (el límite de una función creciente en términos del límite de una sucesión)

Sean

$$-\infty \le a < b \le +\infty,$$

$\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función creciente,

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (a,b) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \lim_{t\to b^-} \varphi(t).$$

Ejercicio. Recordar el criterio de límite en términos de sucesiones (teorema de Heine) y mostrar que la proposición escrita arriba es un corolario de este teorema.

Vamos a demostrar la proposición de otra manera, usando la definición del supremo.

Inicio de la demostración. Sea

$$s := \sup(\varphi[(a,b)]), \qquad \text{esto es,} \qquad s := \sup_{a<t<b} \varphi(t).$$

Sabemos que

$$\lim_{t\to b^-} \varphi(t) = s.$$

Demostremos que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = s.$$

Consideremos dos casos: $s < +\infty$ y $s = +\infty$. $\Rightarrow$

Demostración en el caso $s < +\infty$

Demostración en el caso $s < +\infty$

$s := \sup(\varphi[(a,b)])$

$\varphi \quad \nearrow$

$\lim_{n\to\infty} u_n = b$

Demostración en el caso $s < +\infty$

$s := \sup(\varphi[(a, b)])$

$\varphi \nearrow$

$\lim_{n\to\infty} u_n = b$

$\varepsilon > 0$

Demostración en el caso $s < +\infty$

$$s := \sup(\varphi[(a,b)])$$

$$\varphi \nearrow$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = b$$

$$\varepsilon > 0$$

$$c \in (a,b)$$
$$\varphi(c) > s - \varepsilon$$

Demostración en el caso $s < +\infty$

$$s := \sup(\varphi[(a,b)])$$

$$\varphi \nearrow$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = b$$

$$\varepsilon > 0$$

$$c \in (a,b)$$
$$\varphi(c) > s - \varepsilon$$

$$k \in \mathbb{N}$$
$$\forall n \geq k \quad u_n > c$$

Demostración en el caso $s < +\infty$

$$s := \sup(\varphi[(a,b)])$$

$$\varphi \quad \nearrow$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = b$$

$$\varepsilon > 0$$

$$c \in (a,b)$$
$$\varphi(c) > s - \varepsilon$$

$$k \in \mathbb{N}$$
$$\forall n \geq k \quad u_n > c$$

$$k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k$$
$$\varphi(u_n) \geq \varphi(c) > s - \varepsilon$$

Demostración en el caso $s < +\infty$

$$s := \sup(\varphi[(a,b)])$$

$$\varphi \quad \nearrow$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = b$$

$$\varepsilon > 0$$

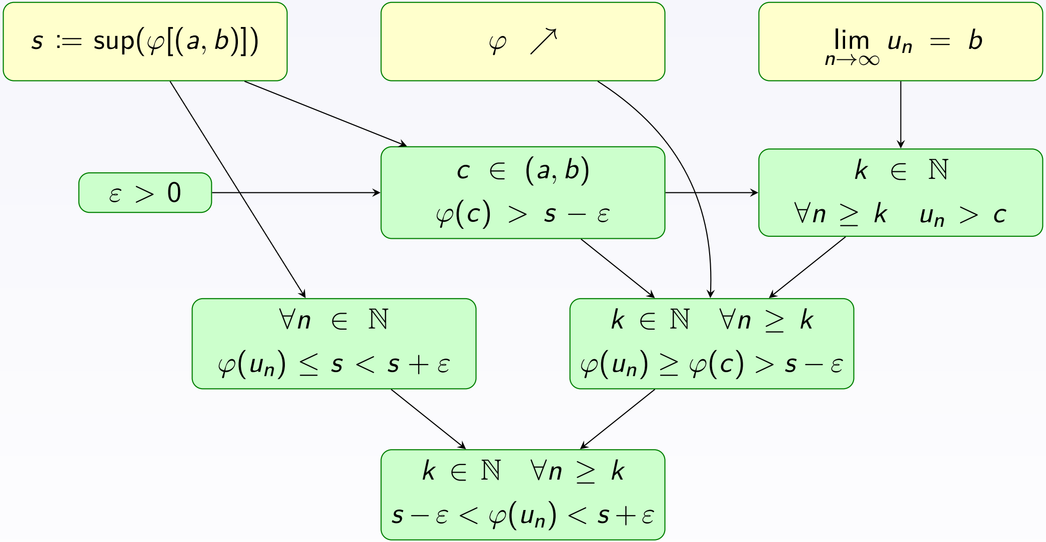
$$c \in (a,b)$$
$$\varphi(c) > s - \varepsilon$$

$$k \in \mathbb{N}$$
$$\forall n \geq k \quad u_n > c$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$
$$\varphi(u_n) \leq s < s + \varepsilon$$

$$k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k$$
$$\varphi(u_n) \geq \varphi(c) > s - \varepsilon$$

Demostración en el caso $s < +\infty$



Demostración en el caso $s = +\infty$

Demostración en el caso $s = +\infty$

$$\sup(\varphi[(a,b)]) = +\infty$$

$$\varphi \nearrow$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = b$$

Demostración en el caso $s = +\infty$

$\sup(\varphi[(a, b)]) = +\infty$

$\varphi \quad \nearrow$

$\lim_{n \to \infty} u_n \; = \; b$

$E \; > \; 0$

Demostración en el caso $s = +\infty$

$$\sup(\varphi[(a,b)]) = +\infty$$

$$\varphi \nearrow$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = b$$

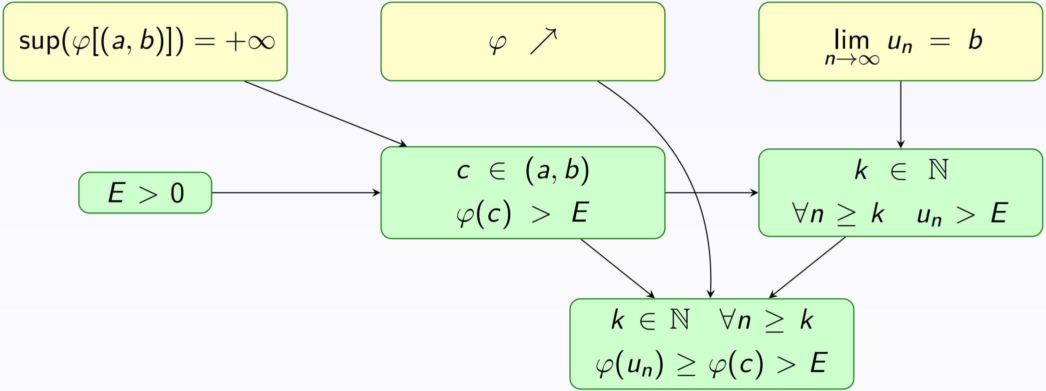
$$E > 0$$

$$c \in (a,b)$$
$$\varphi(c) > E$$

Demostración en el caso $s = +\infty$

$$
\begin{tikzcd}
\sup(\varphi[(a,b)]) = +\infty \arrow[dr] & \varphi \ \nearrow & \lim\limits_{n\to\infty} u_n = b \arrow[d] \\
E > 0 \arrow[r] & \begin{gathered} c \in (a,b) \\ \varphi(c) > E \end{gathered} \arrow[r] & \begin{gathered} k \in \mathbb{N} \\ \forall n \geq k \quad u_n > E \end{gathered}
\end{tikzcd}
$$

Demostración en el caso $s = +\infty$



Ejercicios

Ejercicio.

Enunciar y demostrar un resultado similar para $\varphi \nearrow, \quad u_n \to a.$

Ejercicio.

Enunciar y demostrar un resultado similar para $\varphi \searrow, \quad u_n \to b.$

Ejercicio.

Enunciar y demostrar un resultado similar para $\varphi \searrow, \quad u_n \to a.$