

Programa del curso “análisis armónico”
 (“temas selectos de análisis funcional y real”)

Egor Maximenko,

<https://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

27 de agosto de 2024

Grupos conmutativos localmente compactos

$(G, +)$ es un grupo conmutativo si

- $\forall a, b, c \in G \quad (a + b) + c = a + (b + c),$
- $\forall a, b \in G \quad a + b = b + a,$
- $\exists 0 \in G \quad \forall a \in G \quad a + 0 = a,$
- $\forall a \in G \quad \exists b \in G \quad a + b = 0.$

Grupos conmutativos localmente compactos

$(G, +)$ es un grupo conmutativo si

- $\forall a, b, c \in G \quad (a + b) + c = a + (b + c),$
- $\forall a, b \in G \quad a + b = b + a,$
- $\exists 0 \in G \quad \forall a \in G \quad a + 0 = a,$
- $\forall a \in G \quad \exists b \in G \quad a + b = 0.$

Un espacio topológico (G, τ) se llama localmente compacto, si

Grupos conmutativos localmente compactos

$(G, +)$ es un grupo conmutativo si

- $\forall a, b, c \in G \quad (a + b) + c = a + (b + c),$
- $\forall a, b \in G \quad a + b = b + a,$
- $\exists 0 \in G \quad \forall a \in G \quad a + 0 = a,$
- $\forall a \in G \quad \exists b \in G \quad a + b = 0.$

Un espacio topológico (G, τ) se llama localmente compacto, si

$$\forall a \in G \quad \exists V \in \tau \quad (a \in V \quad \wedge \quad \text{clos}(V) \text{ es compacto}).$$

Medida de Haar en un GCLC

Teorema (sin demostración)

Sea G un grupo conmutativo localmente compacto.

Denotamos por \mathcal{B}_G a la σ -álgebra de Borel de G .

Entonces existe una medida $\nu: \mathcal{B}_G \rightarrow [0, +\infty]$ tal que

- ν es invariante bajo traslaciones:

$$\forall a \in G \quad \forall X \in \mathcal{B}_G \quad \nu(a + X) = \nu(X),$$

- ν es regular por arriba y por abajo.

Medida de Haar en un GCLC

Teorema (sin demostración)

Sea G un grupo conmutativo localmente compacto.

Denotamos por \mathcal{B}_G a la σ -álgebra de Borel de G .

Entonces existe una medida $\nu: \mathcal{B}_G \rightarrow [0, +\infty]$ tal que

- ν es invariante bajo traslaciones:

$$\forall a \in G \quad \forall X \in \mathcal{B}_G \quad \nu(a + X) = \nu(X),$$

- ν es regular por arriba y por abajo.

Si ν_1 y ν_2 son dos medidas de Haar sobre G , entonces existe $C > 0$ tal que $\nu_2 = C\nu_1$.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida de conteo.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida de conteo.
- \mathbb{R} ,

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida de conteo.
- \mathbb{R} , con la topología usual y la medida de Lebesgue.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida de conteo.
- \mathbb{R} , con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$,

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida de conteo.
- \mathbb{R} , con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida de conteo.
- \mathbb{R} , con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

$$n = 5, \quad \nu(\{3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}) =$$

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida de conteo.
- \mathbb{R} , con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

$$n = 5, \quad \nu(\{3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}) = 2.$$

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida de conteo.
- \mathbb{R} , con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

$$n = 5, \quad \nu(\{3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}) = 2.$$

- $\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$,

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida de conteo.
- \mathbb{R} , con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

$$n = 5, \quad \nu(\{3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}) = 2.$$

- $\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, con la topología del cociente y la medida normalizada.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- \mathbb{Z} , con la topología discreta y la medida de conteo.
- \mathbb{R} , con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

$$n = 5, \quad \nu(\{3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}) = 2.$$

- $\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, con la topología del cociente y la medida normalizada.

Se puede mostrar que $\mathbb{R}_{2\pi} \cong \mathbb{T}$, donde

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

El grupo dual de un GALC

Sea G un GALC.

Un **caracter** de G es un homomorfismo continuo $G \rightarrow \mathbb{T}$.

El grupo dual de un GALC

Sea G un GALC.

Un **caracter** de G es un homomorfismo continuo $G \rightarrow \mathbb{T}$.

En otras palabras, $\psi: G \rightarrow \mathbb{T}$ es un caracter si

- $\forall a, b \in G \quad \psi(a + b) = \psi(a)\psi(b),$
- ψ es una función continua.

El grupo dual de un GALC

Sea G un GALC.

Un **caracter** de G es un homomorfismo continuo $G \rightarrow \mathbb{T}$.

En otras palabras, $\psi: G \rightarrow \mathbb{T}$ es un caracter si

- $\forall a, b \in G \quad \psi(a + b) = \psi(a)\psi(b),$
- ψ es una función continua.

El sentido intuitivo: son oscilaciones elementales.

El grupo dual de un GALC

Sea G un GALC.

Un **caracter** de G es un homomorfismo continuo $G \rightarrow \mathbb{T}$.

En otras palabras, $\psi: G \rightarrow \mathbb{T}$ es un caracter si

- $\forall a, b \in G \quad \psi(a + b) = \psi(a)\psi(b)$,
- ψ es una función continua.

El sentido intuitivo: son oscilaciones elementales.

$\widehat{G} :=$ el conjunto de los caracteres de G , con las operaciones punto a punto:

$$(\psi_1\psi_2)(a) := \psi_1(a)\psi_2(a).$$

Ejemplos de caracteres

- Para $G = \mathbb{R}$, cada caracter es de la forma

$$\psi_\xi(a) = \exp(2\pi i a\xi) \quad (a \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}).$$

Ejemplos de caracteres

- Para $G = \mathbb{R}$, cada caracter es de la forma

$$\psi_\xi(a) = \exp(2\pi i a\xi) \quad (a \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}).$$

- Para $G = \mathbb{Z}$, cada caracter es de la forma

$$\psi_\tau(k) = \tau^k \quad (k \in \mathbb{Z}, \tau \in \mathbb{T}).$$

Ejemplos de caracteres

- Para $G = \mathbb{T}$, cada caracter es de la forma

$$\psi_k(\tau) = \tau^k \quad (\tau \in \mathbb{T}, k \in \mathbb{Z}).$$

Ejemplos de caracteres

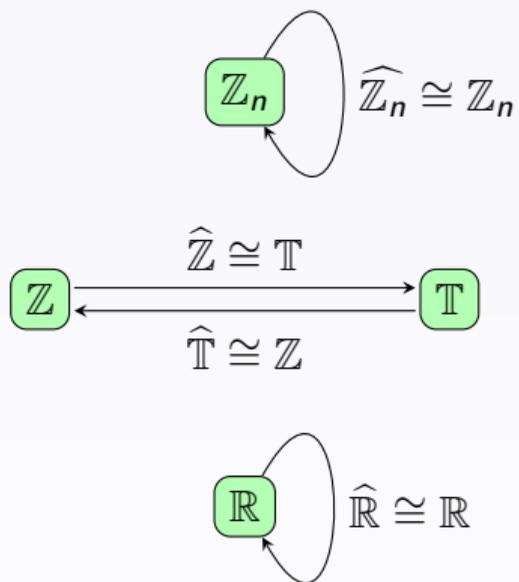
- Para $G = \mathbb{T}$, cada caracter es de la forma

$$\psi_k(\tau) = \tau^k \quad (\tau \in \mathbb{T}, k \in \mathbb{Z}).$$

- Para $G = \mathbb{Z}_n$, cada caracter es de la forma

$$\psi_{k+n\mathbb{Z}}(j + n\mathbb{Z}) = \exp \frac{2\pi i jk}{n} \quad (j, k \in \mathbb{Z}).$$

Ejemplos de grupos y sus duales



Topología y medida de Haar en el grupo dual

Sea G un GALC.

En el grupo dual \widehat{G} se puede definir una topología tal que \widehat{G} se convierte en GALC.

Supongamos que en el grupo original G está elegida una medida de Haar ν .

En el grupo dual \widehat{G} hay muchas medidas de Haar,
pero una de ellas corresponde bien a ν , en cierto sentido.

La denotamos por $\widehat{\nu}$.

Teorema de dualidad de Pontryagin

Teorema (dualidad de Pontryagin)

Sea G un GALC. Entonces

$$\widehat{\widehat{G}} \cong G.$$

Teorema de dualidad de Pontryagin

Teorema (dualidad de Pontryagin)

Sea G un GALC. Entonces

$$\widehat{\widehat{G}} \cong G.$$

En este curso no demostramos el teorema de Pontryagin,
pero lo comprobamos con nuestros ejemplos:

$$\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}, \quad \widehat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}, \quad \widehat{\mathbb{Z}_n} \cong \mathbb{Z}_n.$$

El problema fundamental de análisis armónico, enunciado intuitivo

Dada una función $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, queremos aproximarla por una combinación lineal de las oscilaciones elementales, es decir, caracteres:

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^m c_k \psi_k(x),$$

$$c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}, \quad \psi_1, \dots, \psi_m \in \widehat{G}.$$

En general, en vez de una combinación lineal finita, necesitamos una integral que involucra a todos los caracteres:

$$f(x) \approx \int_{\widehat{G}} g(\psi) \psi(x) d\widehat{\nu}(\psi).$$

Aquí g es una función desconocida que da cierto peso a cada caracter.

Transformada de Fourier

Sea G un GALC. Para cada f en $L^1(G)$, se define $\mathcal{F}f: \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(\mathcal{F}f)(\psi) := \int_G \overline{\psi(x)} f(x) d\nu(x).$$

Transformada de Fourier

Sea G un GALC. Para cada f en $L^1(G)$, se define $\mathcal{F}f: \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(\mathcal{F}f)(\psi) := \int_G \overline{\psi(x)} f(x) d\nu(x).$$

Teorema de inversión de Fourier

Sea $f \in L^1(G)$ tal que $\mathcal{F}f \in L^1(\widehat{G})$. Entonces

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \psi(x) (\mathcal{F}f)(\psi) d\widehat{\nu}(\psi).$$

Transformada de Fourier

Sea G un GALC. Para cada f en $L^1(G)$, se define $\mathcal{F}f: \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(\mathcal{F}f)(\psi) := \int_G \overline{\psi(x)} f(x) d\nu(x).$$

Teorema de inversión de Fourier

Sea $f \in L^1(G)$ tal que $\mathcal{F}f \in L^1(\widehat{G})$. Entonces

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \psi(x) (\mathcal{F}f)(\psi) d\widehat{\nu}(\psi).$$

El sentido intuitivo: f se descompone en las oscilaciones elementales.

Se resuelve el problema fundamental con $g = \mathcal{F}f$.

Teorem de Plancherel

Sea $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Entonces

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\widehat{G})} = \|f\|_{L^2(G)}.$$

Convolución

Dadas $f, g \in L^1(G)$,

$$(f * g)(x) := \int_G f(x - y)g(y) \, d\nu(y).$$

Convolución

Dadas $f, g \in L^1(G)$,

$$(f * g)(x) := \int_G f(x - y)g(y) \, d\nu(y).$$

Teorema de convolución

Sean $f, g \in L^1(G)$. Entonces

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g).$$

Análisis armónico clásico vs análisis armónico abstracto

En el análisis armónico abstracto se estudian las propiedades de la transformada de Fourier asociada a un GALC arbitrario G .

En este curso no lo vamos a hacer.

Estudiaremos solamente los casos $G = \mathbb{Z}_n$, $G = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{R}_{2\pi} \cong \mathbb{T}$ y $G = \mathbb{R}$.

Programa

El curso consiste de las siguientes unidades.

- La transformada de Fourier del grupo \mathbb{Z}_n
(la transformada finita de Fourier, la matriz de Fourier).
- Las transformadas de Fourier de los grupos \mathbb{Z} y $\mathbb{R}_{2\pi}$
(las series de Fourier y los coeficientes de Fourier).
- La transformada de Fourier del grupo \mathbb{R} (la integral de Fourier).

Algunas aplicaciones de análisis armónico

- Aproximación de funciones.
- El estudio de algunas ecuaciones diferenciales.
- El estudio de algunos operadores lineales.
- El estudio de algunas clases de matrices (por ejemplo, las matrices de Toeplitz).
- Análisis espectral de procesos reales (procesamiento de señales, procesos estocásticos).

Bibliografía



Wong, Man Wah:

Discrete Fourier Analysis.



Pinsky, Mark A.:

Introduction to Fourier Analysis and Wavelets.



Gasquet, Claude; Witomski, Patrick:

Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets.



Katznelson, Yitzhak:

An Introduction to Harmonic Analysis.

Bibliografía

-  Grafakos, Loukas:
Classical Fourier Analysis.
-  Rudin, Walter:
Functional Analysis.
-  Folland, Gerald B.:
A Course in Abstract Harmonic Analysis.

Sistema de evaluación

- Dos exámenes parciales: 50 %.
- Exposiciones de los estudiantes, de manera individual o por equipos.
- Tareas grandes, por equipos de 2 o 3 personas.
Deben involucrar mucha programación. De preferencia, deben ser aplicadas.
- Una o dos tareas pequeñas, por equipos de 2 personas.