El primer teorema fundamental de cálculo para funciones Lebesgue integrables (un tema de análisis real)

Egor Maximenko
https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

15 de noviembre de 2024

Objetivo: demostrar el primer TFC para funciones Lebesgue integrables.

$$\text{Si} \quad f \in L^1([a,b]) \quad \text{y} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{entonces} \quad F' = f \text{ c.t.p.}$$

Prerrequisitos:

- teorema sobre la derivada de una función creciente,
- funciones de variación acotada y sus propiedades,
- funciones absolutamente continuas y algunas de sus propiedades básicas,
- proposición sobre la integral nula de una función positiva,
- teorema de la convergencia acotada,
- propiedad regular de la medida de Lebesgue.

Plan

1. Repaso de las herramientas auxiliares
2. TFC para los puntos de continuidad
3. TFC para $f \in \mathcal{L}^\infty$
4. TFC para $f \in \mathcal{L}^1$

Repaso: teorema sobre la derivada de una función monótona

Teorema

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces f es derivable c.t.p. Más aún,

$$\int_a^b f' \, \mathrm{d}\mu \leq f(b) - f(a).$$

Repaso: funciones de variación acotada

Proposición

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$, entonces existen $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crecientes tales que $f = g - h$.

Repaso: funciones de variación acotada

Proposición

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$, entonces existen $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crecientes tales que $f = g - h$.

Corolario

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$, entonces f se descompone en una combinación lineal de cuatro funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}(g_3 - g_4).$$

Repaso: funciones de variación acotada

Proposición

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$, entonces existen $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crecientes tales que $f = g - h$.

Corolario

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$, entonces f se descompone en una combinación lineal de cuatro funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}(g_3 - g_4).$$

Corolario

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$, entonces f es derivable c.t.p. y $f' \in L^1([a,b],\mathbb{C})$.

Repaso: funciones absolutamente continuas

Proposición

$\mathrm{AC}([a, b]) \subseteq C([a, b])$.

Repaso: funciones absolutamente continuas

Proposición

$\mathrm{AC}([a, b]) \subseteq C([a, b])$.

Teorema

$\mathrm{AC}([a, b]) \subseteq \mathrm{BV}([a, b])$.

Repaso: funciones absolutamente continuas

Proposición

$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq C([a,b])$.

Teorema

$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq \mathrm{BV}([a,b])$.

Corolario

Si $f \in \mathrm{AC}([a,b])$, entonces f es derivable c.t.p.

Repaso: la integral con límite superior variable es AC

Proposición

Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_a^x f \,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$.

Corolarios:

Repaso: la integral con límite superior variable es AC

Proposición

Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_a^x f \,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$.

Corolarios:

- $F \in C([a,b],\mathbb{C})$, $F \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$,
- F es derivable c.t.p., $F' \in L^1([a,b],\mathbb{C})$.

Repaso: la integral nula de una función positiva

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to [0, +\infty]$ una función $\mathcal{F}$-medible. Supongamos que

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Repaso: la integral nula de una función positiva

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to [0, +\infty]$ una función $\mathcal{F}$-medible.

Supongamos que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Entonces $f = 0$ c.t.p.

Repaso: teorema de la convergencia acotada

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita,
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles,
$f_n \to g$ de manera puntual o c.t.p.
Además, supongamos que existe $M \geq 0$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leq M.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Repaso: propiedad regular por abajo de la medida de Lebesgue

Sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Lebesgue y sea μ la medida de Lebesgue.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < +\infty$ y sea $\varepsilon > 0$.

Entonces existe K compacto tal que

Repaso: propiedad regular por abajo de la medida de Lebesgue

Sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Lebesgue y sea μ la medida de Lebesgue.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < +\infty$ y sea $\varepsilon > 0$.
Entonces existe K compacto tal que

$$K \subseteq A, \qquad \mu(K) > \mu(A) - \varepsilon.$$

En otras palabras, si $A \in \mathcal{F}$ y $\mu(A) < +\infty$, entonces

$$\mu(A) =$$

Repaso: propiedad regular por abajo de la medida de Lebesgue

Sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Lebesgue y sea μ la medida de Lebesgue.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < +\infty$ y sea $\varepsilon > 0$.

Entonces existe K compacto tal que

$$K \subseteq A, \qquad \mu(K) > \mu(A) - \varepsilon.$$

En otras palabras, si $A \in \mathcal{F}$ y $\mu(A) < +\infty$, entonces

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon\ K \subseteq A,\ K \text{ es compacto}\}.$$

Repaso: proposición sobre las integrales nulas con límite superior variable

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_{[a,x]} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Supongamos que $F(x) = 0$ para cada x en $[a,b]$. Entonces $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0$.

TFC para un punto de continuidad

Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

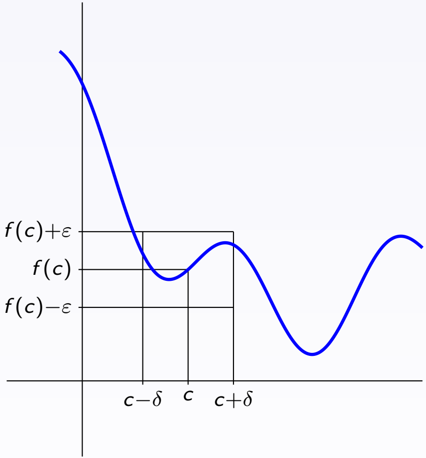
$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Supongamos que $c \in [a,b]$ y f es continua en c.

Entonces, $F'(c) = f(c)$, esto es,

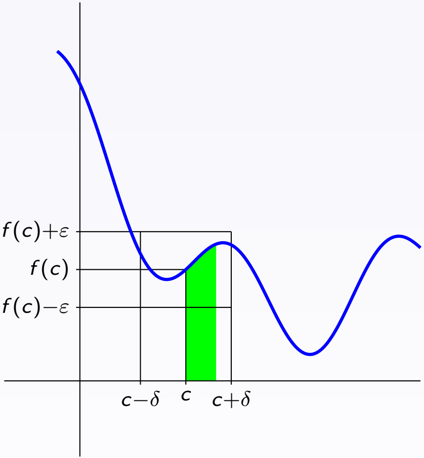
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ c+h \in [a,b]}} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Idea: la situación cerca de un punto de continuidad



Si $|t-c| < \delta$, entonces $|f(t)-f(c)| < \varepsilon$.

Idea: la situación cerca de un punto de continuidad

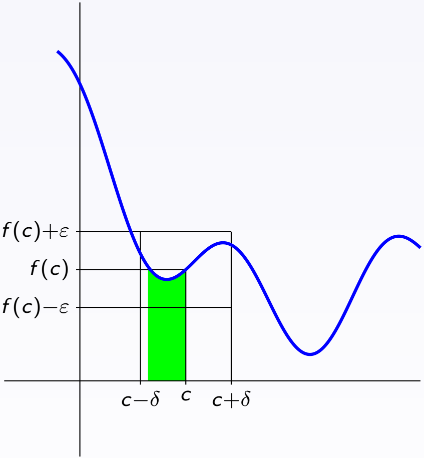


Si $|t-c|<\delta$, entonces $|f(t)-f(c)|<\varepsilon$.

Para $0<h<\delta$,

$$\int_{[c,c+h]} f\,\mathrm{d}\mu \approx h\,f(c).$$

Idea: la situación cerca de un punto de continuidad



Si $|t-c| < \delta$, entonces $|f(t)-f(c)| < \varepsilon$.

Para $0 < h < \delta$,

$$\int_{[c,c+h]} f \, \mathrm{d}\mu \approx h\, f(c).$$

Para $-\delta < h < 0$,

$$\int_{[c+h,c]} f \, \mathrm{d}\mu \approx |h|\, f(c).$$

Demostración, inicio

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right|$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a,b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a,b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a,b]$, entonces

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| =$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f(c)\,\mathrm{d}\mu\right|$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f\,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f(c)\,\mathrm{d}\mu\right|$$

$$\leq$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f(c)\,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}\mu(t)\end{aligned}$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f\,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f(c)\,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}\mu(t) \le \frac{1}{h}\cdot h\cdot\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f(c)\,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}\mu(t) \le \frac{1}{h}\cdot h\cdot\frac{\varepsilon}{2} <\end{aligned}$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} f(c)\,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{[c,c+h]} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}\mu(t) \leq \frac{1}{h}\cdot h \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right|$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| =$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right|$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f\,\mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f\,\mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right|$$

$$=$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f\,\mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f\,\mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right| \\ &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f\,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f(c)\,\mathrm{d}\mu\right|\end{aligned}$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f \, \mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f \, \mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f \, \mathrm{d}\mu - \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f(c) \, \mathrm{d}\mu\right| \\
&\le
\end{aligned}$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f(c) \,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\le \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} |f(t) - f(c)| \,\mathrm{d}\mu(t)
\end{aligned}
$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right| \\ &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f(c) \,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} |f(t) - f(c)| \,\mathrm{d}\mu(t) \leq\end{aligned}$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f(c)\,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\le \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}\mu(t) \le \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f\,\mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f\,\mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f\,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f(c)\,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\le \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} |f(t)-f(c)|\,\mathrm{d}\mu(t) \le \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\frac{\varepsilon}{2} <
\end{aligned}$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f(c) \,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} |f(t) - f(c)| \,\mathrm{d}\mu(t) \leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f(c) \,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\le \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} |f(t) - f(c)| \,\mathrm{d}\mu(t) \le \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que

Demostración, final

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_{[a,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{[a,c+h]} f \,\mathrm{d}\mu\right) - f(c)\right| \\ &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f \,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} f(c) \,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\int_{[c+h,c]} |f(t) - f(c)| \,\mathrm{d}\mu(t) \le \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Hemos demostrado que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

TFC para funciones continuas, aproximación por la sucesión $c + 1/n$

Hemos demostrado el TFC para las funciones continuas.

En particular, este resultado implica que si $u \in C([a,b])$ y $c \in (a,b)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \int_c^{c+1/n} u(t)\,\mathrm{d}t \right) = u(c).$$

TFC para $f \in \mathcal{L}^\infty$

TFC para las funciones acotadas

Sea $f \in \mathcal{L}^\infty([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Entonces, $F'(x) = f(x)$ para c.t.p. x en (a,b).

Demostración, inicio

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces, $|f(x)| \leq K$ para c.t.p. x en $[a, b]$.

Demostración, inicio

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces, $|f(x)| \leq K$ para c.t.p. x en $[a, b]$.

Vamos a "suavizar" la función f.

Demostración, inicio

Sea $K := \|f\|_{\infty}$. Entonces, $|f(x)| \le K$ para c.t.p. x en $[a, b]$.

Vamos a "suavizar" la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demostración, inicio

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces, $|f(x)| \le K$ para c.t.p. x en $[a, b]$.

Vamos a "suavizar" la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos que $|g_n(x)| \le K$.

Demostración, inicio

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces, $|f(x)| \le K$ para c.t.p. x en $[a, b]$.

Vamos a "suavizar" la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos que $|g_n(x)| \le K$.

Expresemos g_n en términos de F:

$$g_n(x) =$$

Demostración, inicio

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces, $|f(x)| \le K$ para c.t.p. x en $[a, b]$.

Vamos a "suavizar" la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos que $|g_n(x)| \le K$.

Expresemos g_n en términos de F:

$$g_n(x) = n\,(F(x + 1/n) - F(x)) =$$

Demostración, inicio

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces, $|f(x)| \le K$ para c.t.p. x en $[a, b]$.

Vamos a "suavizar" la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos que $|g_n(x)| \le K$.

Expresemos g_n en términos de F:

$$g_n(x) = n\,(F(x + 1/n) - F(x)) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Demostración, continuación

$$g_n(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Demostración, continuación

$$g_n(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Sabemos que F es derivable c.t.p. (¿por qué?).

Demostración, continuación

$$g_n(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Sabemos que F es derivable c.t.p. (¿por qué?).

Por la definición de la derivada, $g_n(x) \to F'(x)$ para casi todo x.

Demostración, continuación

Dado c en (a,b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a,c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x$$

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x =$$

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x =$$

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x + 1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x$$

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x + 1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x =$$

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Cancelamos la integral sobre $[a + 1/n, c]$:

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x + 1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Cancelamos la integral sobre $[a + 1/n, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x$$

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Cancelamos la integral sobre $[a + 1/n, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x =$$

Demostración, continuación

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Cancelamos la integral sobre $[a + 1/n, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Demostración, final

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Demostración, final

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

Demostración, final

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x =$$

Demostración, final

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) =$$

Demostración, final

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración, final

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hemos mostrado que

$$\int_a^c (F'(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall c \in [a, b].$$

Demostración, final

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hemos mostrado que

$$\int_a^c (F'(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall c \in [a,b].$$

Por la proposición sobre las integrales nulas, $F' \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} f$.

Estamos listos para demostrar el resultado principal de esta plática.

El primer teorema fundamental de cálculo para funciones Lebesgue integrables

Sea $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$. Definimos $F\colon [a, b] \to \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Entonces, $F' \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} f$.

Demostración, inicio

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Demostración, inicio

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Por eso, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $f \geq 0$.

Demostración, inicio

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Por eso, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $f \geq 0$.

Pongamos

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n; \\ 0, & f(x) > n. \end{cases}$$

Demostración, inicio

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Por eso, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $f \geq 0$.

Pongamos

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n; \\ 0, & f(x) > n. \end{cases}$$

Entonces,

Demostración, inicio

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Por eso, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $f \ge 0$.

Pongamos

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \le n; \\ 0, & f(x) > n. \end{cases}$$

Entonces,

- g_n es acotada para cada n,

Demostración, inicio

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Por eso, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $f \geq 0$.

Pongamos

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n; \\ 0, & f(x) > n. \end{cases}$$

Entonces,

- g_n es acotada para cada n,
- $g_n(x) \nearrow f(x)$ para cada x en $[a, b]$,

Demostración, inicio

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Por eso, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $f \geq 0$.

Pongamos

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n; \\ 0, & f(x) > n. \end{cases}$$

Entonces,

- g_n es acotada para cada n,
- $g_n(x) \nearrow f(x)$ para cada x en $[a, b]$,
- $f = g_n + (f - g_n)$.

Demostración, continuación

Como $f = g_n + (f - g_n)$,

Demostración, continuación

Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Demostración, continuación

Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

Demostración, continuación

Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

- Por el TFC para funciones acotadas, $G_n' = g_n$ c.t.p.

Demostración, continuación

Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

- Por el TFC para funciones acotadas, $G_n' = g_n$ c.t.p.
- H_n es creciente, luego H_n es derivable c.t.p. y $H_n' \geq 0$ c.t.p.

Demostración, continuación

Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

- Por el TFC para funciones acotadas, $G_n' = g_n$ c.t.p.
- H_n es creciente, luego H_n es derivable c.t.p. y $H_n' \geq 0$ c.t.p.

Luego

Demostración, continuación

Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

- Por el TFC para funciones acotadas, $G_n' = g_n$ c.t.p.
- H_n es creciente, luego H_n es derivable c.t.p. y $H_n' \geq 0$ c.t.p.

Luego

$$F' = G_n' + H_n' \geq G_n' = g_n \text{ c.t.p.}$$

Demostración, continuación

Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

- Por el TFC para funciones acotadas, $G_n' = g_n$ c.t.p.
- H_n es creciente, luego H_n es derivable c.t.p. y $H_n' \geq 0$ c.t.p.

Luego

$$F' = G_n' + H_n' \geq G_n' = g_n \text{ c.t.p.}$$

Como n es arbitrario y $g_n \to f$, obtenemos $F' \geq f$ c.t.p.

Demostración, final

Hemos mostrado que $F' \geq f$ c.t.p.

Demostración, final

Hemos mostrado que $F' \geq f$ c.t.p.

Por otro lado, por el teorema sobre la derivada de una función creciente,

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración, final

Hemos mostrado que $F' \geq f$ c.t.p.

Por otro lado, por el teorema sobre la derivada de una función creciente,

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esto significa que

$$\int_a^b (F'(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Demostración, final

Hemos mostrado que $F' \geq f$ c.t.p.

Por otro lado, por el teorema sobre la derivada de una función creciente,

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esto significa que

$$\int_a^b (F'(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Como $F' - f \geq 0$, concluimos que $F' - f = 0$ c.t.p.