La regla de Leibniz para derivar integrales de Lebesgue respecto al parámetro (un tema de análisis real)

Egor Maximenko
https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2024-12-03

Objetivos.

- Establecer condiciones suficientes para derivar bajo el signo integral, esto es,

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_X f(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x).$$

- Conocer algunas aplicaciones de esta regla.

Prerrequisitos:

- el concepto de la integral de Lebesgue y sus propiedades básicas,
- el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,
- el criterio de límite en términos de sucesiones (el criterio de Heine),
- la definición de la derivada,
- el teorema del valor medio para funciones complejas.

Proposición (el teorema del valor medio para funciones complejas)

Sea Y un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $\psi \in C(Y, \mathbb{C})$.

Supongamos que ψ es derivable en $\operatorname{int}(Y)$, $L \geq 0$, y

$$\sup_{y \in \operatorname{int}(Y)} |\psi'(y)| \leq L.$$

Entonces para cualesquier y_1, y_2 en Y,

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|.$$

Proposición (el teorema del valor medio para funciones complejas)

Sea Y un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $\psi \in C(Y, \mathbb{C})$.

Supongamos que ψ es derivable en $\operatorname{int}(Y)$, $L \geq 0$, y

$$\sup_{y \in \operatorname{int}(Y)} |\psi'(y)| \leq L.$$

Entonces para cualesquier y_1, y_2 en Y,

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|.$$

Otra forma de la conclusión: $\left|\dfrac{\psi(y_1) - \psi(y_2)}{y_1 - y_2}\right| \leq L.$

Ejemplo: no se cumple el TVM en forma de igualdad

Sea $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\psi(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,.$$

Ejemplo: no se cumple el TVM en forma de igualdad

Sea $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\psi(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,.$$

Entonces

$$\psi(2\pi) - \psi(0) =$$

Ejemplo: no se cumple el TVM en forma de igualdad

Sea $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\psi(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}.$$

Entonces

$$\psi(2\pi) - \psi(0) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} =$$

Ejemplo: no se cumple el TVM en forma de igualdad

Sea $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\psi(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}\,.$$

Entonces

$$\psi(2\pi) - \psi(0) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} = 1 - 1 = 0.$$

Ejemplo: no se cumple el TVM en forma de igualdad

Sea $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\psi(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}.$$

Entonces

$$\psi(2\pi) - \psi(0) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} = 1 - 1 = 0.$$

Por otro lado,

$$\psi'(t) =$$

Ejemplo: no se cumple el TVM en forma de igualdad

Sea $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\psi(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}.$$

Entonces

$$\psi(2\pi) - \psi(0) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} = 1 - 1 = 0.$$

Por otro lado,

$$\psi'(t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t},$$

Ejemplo: no se cumple el TVM en forma de igualdad

Sea $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\psi(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}.$$

Entonces

$$\psi(2\pi) - \psi(0) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} = 1 - 1 = 0.$$

Por otro lado,

$$\psi'(t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}, \qquad |\psi'(t)| =$$

Ejemplo: no se cumple el TVM en forma de igualdad

Sea $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\psi(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,.$$

Entonces

$$\psi(2\pi) - \psi(0) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} = 1 - 1 = 0.$$

Por otro lado,

$$\psi'(t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}, \qquad |\psi'(t)| = 1.$$

Ejemplo: no se cumple el TVM en forma de igualdad

Sea $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\psi(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}.$$

Entonces

$$\psi(2\pi) - \psi(0) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} = 1 - 1 = 0.$$

Por otro lado,

$$\psi'(t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}, \qquad |\psi'(t)| = 1.$$

En este ejemplo, no existe t en $(0, 2\pi)$ tal que $\psi(2\pi) - \psi(0) = \psi'(t) \cdot 2\pi$.

Ejemplo: no se cumple el TVM en forma de igualdad

Sea $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\psi(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}.$$

Entonces

$$\psi(2\pi) - \psi(0) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} = 1 - 1 = 0.$$

Por otro lado,

$$\psi'(t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}, \qquad |\psi'(t)| = 1.$$

En este ejemplo, no existe t en $(0, 2\pi)$ tal que $\psi(2\pi) - \psi(0) = \psi'(t) \cdot 2\pi$.

Solamenente se cumple la desigualdad $|f(2\pi) - f(0)| \le |y_1 - y_2|$.

Repaso de notación

Si $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$, $x \in X$, entonces $\quad f_x\colon Y \to \mathbb{C}, \quad f_x(y) := f(x, y).$

Repaso de notación

Si $f : X \times Y \to \mathbb{C}$, $x \in X$, entonces $\quad f_x : Y \to \mathbb{C}, \quad f_x(y) := f(x, y).$

Denotamos por f_x' la derivada de la función f_x:

$$f_x'(y) := \lim_{z \to y} \frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y}.$$

Repaso de notación

Si $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$, $x \in X$, entonces $\quad f_x\colon Y \to \mathbb{C}, \quad f_x(y) := f(x,y)$.

Denotamos por f_x' la derivada de la función f_x:

$$f_x'(y) := \lim_{z \to y} \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z - y}.$$

Otra notación buena (la derivada parcial respecto al segundo argumento):

$$(D_2 f)(x,y) := \lim_{z \to y} \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z - y}, \qquad (\partial_2 f)(x,y) := \lim_{z \to y} \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z - y}.$$

Repaso de notación

Si $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$, $x \in X$, entonces $\quad f_x\colon\ Y \to \mathbb{C}, \quad f_x(y) := f(x,y).$

Denotamos por f_x' la derivada de la función f_x:

$$f_x'(y) := \lim_{z \to y} \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z - y}.$$

Otra notación buena (la derivada parcial respecto al segundo argumento):

$$(D_2 f)(x,y) := \lim_{z \to y} \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z - y}, \qquad (\partial_2 f)(x,y) := \lim_{z \to y} \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z - y}.$$

Una notación antigua: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Teorema (la regla de Leibniz para derivar bajo el signo integral)

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, Y un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$.

Suposiciones:

(S1) $\forall y \in Y$, $f^y \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$;

(S2) para casi todo x en X, la función f_x es derivable;

(S3) $\exists g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$ tal que $|f_x'(y)| \le g(x)$ para casi todo $x \in X$ y $\forall y \in Y$.

Definimos $\quad \Phi\colon Y \to \mathbb{C}, \quad \Phi(y) := \displaystyle\int_X f^y \, \mathrm{d}\mu = \int_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x).$

Entonces para cada y en Y la función $x \mapsto f_x'(y)$ es integrable, Φ es derivable en Y, y

$$\Phi'(y) = \int_X f_x'(y) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Empezamos la demostración: elegimos un "conjunto bueno".

Empezamos la demostración: elegimos un “conjunto bueno”.

La condición (S1) implica que Φ está bien definida.

Empezamos la demostración: elegimos un “conjunto bueno”.

La condición (S1) implica que Φ está bien definida.

Usando las condiciones (S2) y (S3) encontremos B en $\mathcal{F}$ tal que

(B1) $\mu(X \setminus B) = 0$,

(B2) $\forall x \in B \quad f_x$ es derivable,

(B3) $\forall x \in B \quad \forall y \in Y \quad |f_x'(y)| \leq g(x)$.

Empezamos la demostración: elegimos un "conjunto bueno".

La condición (S1) implica que Φ está bien definida.

Usando las condiciones (S2) y (S3) encontremos B en $\mathcal{F}$ tal que

(B1) $\mu(X \setminus B) = 0$,

(B2) $\forall x \in B \quad f_x$ es derivable,

(B3) $\forall x \in B \quad \forall y \in Y \quad |f_x'(y)| \le g(x)$.

Por el teorema del valor medio y la propiedad (B3), obtenemos la siguiente propiedad.

(M) para cualquier x en B y cualesquier y, z en Y con $z \ne y$,

$$\left| \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z - y} \right| \le g(x).$$

$\Rightarrow$

Fijamos un punto y en Y.

Fijamos un punto y en Y.

Definimos $\quad h\colon X \to \mathbb{C}, \quad h(x) := \begin{cases} f'_x(y), & x \in B; \\ 0, & x \in X \setminus B. \end{cases}$

Tenemos:

(S2') $\forall x \in B \qquad \displaystyle\lim_{z\to y} \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z-y} = h(x),$

(S3') $\forall x \in B \qquad |h(x)| \le g(x),$

(M') $\forall x \in B \qquad \forall z \in Y \setminus \{y\} \qquad \displaystyle\left|\frac{f(x,z) - f(x,y)}{z-y}\right| \le g(x).$

Fijamos un punto y en Y.

Definimos $\quad h\colon X \to \mathbb{C}, \quad h(x) := \begin{cases} f_x'(y), & x \in B; \\ 0, & x \in X \setminus B. \end{cases}$

Tenemos:

(S2') $\forall x \in B \qquad \lim\limits_{z \to y} \dfrac{f(x,z) - f(x,y)}{z - y} = h(x),$

(S3') $\forall x \in B \qquad |h(x)| \le g(x),$

(M') $\forall x \in B \qquad \forall z \in Y \setminus \{y\} \qquad \left| \dfrac{f(x,z) - f(x,y)}{z - y} \right| \le g(x).$

Queremos demostrar dos afirmaciones:

$$h \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C}), \qquad \lim_{z \to y} \frac{\Phi(z) - \Phi(y)}{z - y} = \int_X h \, \mathrm{d}\mu.$$

$\Rightarrow$

Demostremos que *h* es medible e integrable.

Demostremos que *h* es medible e integrable.

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Y\setminus\{y\}$ que converge al punto y.

Demostremos que h es medible e integrable.

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Y \setminus \{y\}$ que converge al punto y.

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos $q_n\colon X \to \mathbb{C}$,

$$q_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,y)}{t_n - y} = \frac{f_x(t_n) - f_x(y)}{t_n - y} = \frac{f^{t_n}(x) - f^{y}(x)}{t_n - y}.$$

Demostremos que h es medible e integrable.

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Y \setminus \{y\}$ que converge al punto y.

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos $q_n\colon X \to \mathbb{C}$,

$$q_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,y)}{t_n - y} = \frac{f_x(t_n) - f_x(y)}{t_n - y} = \frac{f^{t_n}(x) - f^{y}(x)}{t_n - y}.$$

Por (S2'), para cada x en B, $\quad q_n(x) \to h(x)$.

Demostremos que h es medible e integrable.

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Y \setminus \{y\}$ que converge al punto y.

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos $q_n\colon X \to \mathbb{C}$,

$$q_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,y)}{t_n - y} = \frac{f_x(t_n) - f_x(y)}{t_n - y} = \frac{f^{t_n}(x) - f^y(x)}{t_n - y}.$$

Por (S2'), para cada x en B, $\quad q_n(x) \to h(x)$.

Las funciones $q_n = \dfrac{f^{t_n} - f^y}{t_n - y}$ son $\mathcal{F}$-medibles, luego h es $\mathcal{F}$-medible.

Demostremos que *h* es medible e integrable.

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Y \setminus \{y\}$ que converge al punto y.

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos $q_n\colon X \to \mathbb{C}$,

$$q_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,y)}{t_n - y} = \frac{f_x(t_n) - f_x(y)}{t_n - y} = \frac{f^{t_n}(x) - f^{y}(x)}{t_n - y}.$$

Por (S2'), para cada x en B, $\quad q_n(x) \to h(x)$.

Las funciones $q_n = \dfrac{f^{t_n} - f^{y}}{t_n - y}$ son $\mathcal{F}$-medibles, luego h es $\mathcal{F}$-medible.

Debido a (S3'), podemos concluir que $h \in \mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{C})$.

$\Rightarrow$

Final de la demostración.

Ya sabemos que $q_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} h$.

Final de la demostración.

Ya sabemos que $\quad q_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} h.$

Por la linealidad de la integral,

$$\frac{\Phi(t_n)-\Phi(y)}{t_n-y}=\frac{1}{t_n-y}\left(\int_X f^{t_n}\,\mathrm{d}\mu-\int_X f^{y}\,\mathrm{d}\mu\right)=\int_X q_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Final de la demostración.

Ya sabemos que $q_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} h$.

Por la linealidad de la integral,

$$\frac{\Phi(t_n) - \Phi(y)}{t_n - y} = \frac{1}{t_n - y}\left(\int_X f^{t_n}\, \mathrm{d}\mu - \int_X f^y\, \mathrm{d}\mu\right) = \int_X q_n\, \mathrm{d}\mu.$$

Por la propiedad (M'), $|q_n(x)| \le g(x)$ para cada x en B.

Final de la demostración.

Ya sabemos que $q_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} h$.

Por la linealidad de la integral,

$$\frac{\Phi(t_n)-\Phi(y)}{t_n-y} = \frac{1}{t_n-y}\left(\int_X f^{t_n}\,\mathrm{d}\mu - \int_X f^{y}\,\mathrm{d}\mu\right) = \int_X q_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Por la propiedad (M'), $|q_n(x)| \le g(x)$ para cada x en B.

Apliquemos el teorema de la convergencia dominada:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(t_n)-\Phi(y)}{t_n-y} = \lim_{n\to\infty}\int_X q_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X h\,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

La demostración entera, sin detalles.

$$\Phi(y) := \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad \frac{\Phi(t_n)-\Phi(y)}{t_n-y} = \int_X \underbrace{\frac{f(x,t_n)-f(x,y)}{t_n-y}}_{q_n(x)}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

La demostración entera, sin detalles.

$$\Phi(y) := \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad \frac{\Phi(t_n) - \Phi(y)}{t_n - y} = \int_X \underbrace{\frac{f(x,t_n) - f(x,y)}{t_n - y}}_{q_n(x)}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Gracias a (S2), $\qquad \forall x \in B \quad \lim_{n\to\infty} q_n(x) = (D_2 f)(x,y).$

La demostración entera, sin detalles.

$$\Phi(y) := \int_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x), \qquad \frac{\Phi(t_n) - \Phi(y)}{t_n - y} = \int_X \underbrace{\frac{f(x, t_n) - f(x, y)}{t_n - y}}_{q_n(x)}\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Gracias a (S2), $\quad \forall x \in B \quad \lim_{n\to\infty} q_n(x) = (D_2 f)(x, y).$

Gracias a (S3), $\quad \forall x \in B \quad |q_n(x)| \le \sup_{w \in \mathrm{int}(Y)} |(D_2 f)(x, w)| \le g(x).$

La demostración entera, sin detalles.

$$\Phi(y) := \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad \frac{\Phi(t_n)-\Phi(y)}{t_n-y} = \int_X \underbrace{\frac{f(x,t_n)-f(x,y)}{t_n-y}}_{q_n(x)}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Gracias a (S2), $\quad \forall x \in B \quad \lim\limits_{n\to\infty} q_n(x) = (D_2 f)(x,y).$

Gracias a (S3), $\quad \forall x \in B \quad |q_n(x)| \le \sup\limits_{w\in\mathrm{int}(Y)} |(D_2 f)(x,w)| \le g(x).$

Aplicamos el teorema de la convergencia dominada:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(t_n)-\Phi(y)}{t_n-y} = \int_X (D_2 f)(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x). \qquad \square$$

Corolario

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, Y un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$.

Suposiciones:

(S1) $\forall y \in Y,\ f^y \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$;

(S4) para casi todo x en X, $f_x \in C^1(Y, \mathbb{C})$;

(S3) $\exists g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$ tal que $|f_x'(y)| \le g(x)$ para casi todo $x \in X$ y $\forall y \in Y$.

Definimos $\quad \Phi\colon Y \to \mathbb{C}, \quad \Phi(y) := \displaystyle\int_X f^y \, \mathrm{d}\mu = \int_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x).$

Entonces $\Phi \in C^1(Y, \mathbb{C})$.

Demostración. Primero aplicar la regla de Leibniz, luego el teorema sobre la continuidad de la función definida por una integral. □

Regla de Leibniz para derivadas de órdenes superiores

Ejercicio.

Modificar las condiciones del teorema y demostrar la regla

$$\Phi^{(k)}(x) = \int_X (D_2^k f)(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Corolario

Sean X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, Y un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Sea $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Se supone:

(C1) $\forall y \in Y, \quad f^y \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$.

(C2) la derivada $D_2 f$ existe y es continua en $X \times Y$.

Definimos

$$\Phi(y) \coloneqq \int_X f(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

Entonces $\Phi \in C^1(Y)$ y

$$\Phi'(y) = \int_X (D_2 f)(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

Idea de demostración. Gracias a la compacidad, $D_2 f$ es acotada. $\square$

La regla de Leibniz con límites de integración variables

Ejercicio.

Sean X, Y intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ y sea $f \in C(X \times Y, \mathbb{C})$. Se supone que

- $\forall (x, y) \in X \times Y \qquad \exists (D_2 f)(x, y)$,
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(X, [0, +\infty]) \qquad \forall (x, y) \in X \times Y \qquad |(D_2 f)(x, y)| \le g(x)$.

Sean φ, ψ funciones derivables $Y \to X$. Se define $\Phi \colon Y \to \mathbb{C}$,

$$\Phi(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) \, \mathrm{d}x.$$

Demostrar que Φ es derivable en Y y calcular su derivada.

Derivadas de la función Γ

Ejercicio.

Recordar la definición de la función Γ, demostrar que $\Gamma \in C^{\infty}((0, +\infty))$ y

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in (0, +\infty) \qquad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} (\ln t)^k \, \mathrm{d}t.$$

Ejercicio.

Demostrar que $\Gamma''(x) > 0$ para cada $x > 0$.

La derivada de la transformada de Fourier de una función

La transformada de Fourier hace un papel muy importante en análisis.

La siguiente aplicación ya sería suficiente para justificar nuestros esfuerzos.

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Supongamos que $\int_{\mathbb{R}} |x|\,|f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$. Denotemos por g la transformada de Fourier de f:

$$g(\xi) := \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Mostrar que

$$g'(\xi) = -2\pi\,\mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} x\,f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio. Sea S un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y sean $f \in \mathcal{M}(S, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(S, (0, +\infty))$, $\alpha > 0$. Supongamos que

$$\int_S \mathrm{e}^{-\alpha g(x)} \, |f(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Definimos $\Phi\colon (\alpha, +\infty) \to \mathbb{C}$,

$$\Phi(\lambda) \coloneqq \int_S e^{-\lambda g(x)} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Mostrar que Φ está bien definida, $\Phi \in C^\infty((\alpha, +\infty), \mathbb{C})$, y

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall \lambda > \alpha \qquad \Phi^{(k)}(\lambda) = (-1)^k \int_S \mathrm{e}^{-\lambda g(x)} (g(x))^k f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio. Sean $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, x^k \,\mathrm{d}x.$$

Un camino para calcular la integral de Poisson

Ejercicio. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $g\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$,

$$f(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2, \qquad g(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt.$$

Demostrar que para cada x en $\mathbb{R}$

$$f'(x) + g'(x) = 0, \qquad f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Demostrar la siguiente fórmula:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ejercicio.

Definimos $f\colon [0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(\alpha, x) := \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{x^2}.$$

Definimos $g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$g(\alpha) := \int_0^{+\infty} f(\alpha, x)\, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Mostrar que $g \in C([0,+\infty), \mathbb{R})$.

Probar que se puede aplicar la regla de Leibniz.

Calcular explícitamente $g(\alpha)$.

Recordatorio: la ecuación diferencial que define la función exponencial

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, y sea $f \in C([0, +\infty))$ tal que f derivable en $(0, +\infty)$,

$$\forall t \in (0, +\infty) \qquad f'(t) = \alpha f(t)$$

y

$$f(0) = \beta.$$

Entonces se sabe que

$$\forall t \in [0, +\infty) \qquad f(t) = \beta\, \mathrm{e}^{\alpha t}\,.$$

Ejercicio. Recordar una demostración de este hecho.

Ejercicio. Fijamos $a > 0$ y definimos $\Phi\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(b) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos(bx)\,\mathrm{d}x.$$

Establecer la relación

$$\Phi'(b) = -\frac{b}{2a}\Phi(b).$$

Demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\,.$$