Teorema de Lebesgue sobre la derivada de una función monótona (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

29 de octubre de 2024

Objetivo

Estudiar la demostración de los siguientes dos resultados de Lebesgue.

En algunos libros estos dos resultados se juntan en un teorema.

Objetivo

Estudiar la demostración de los siguientes dos resultados de Lebesgue.

En algunos libros estos dos resultados se juntan en un teorema.

Teorema (sobre la derivada de una función creciente)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente.

Entonces, $f'(x)$ existe para c.t.p. x en (a, b).

Objetivo

Estudiar la demostración de los siguientes dos resultados de Lebesgue.

En algunos libros estos dos resultados se juntan en un teorema.

Teorema (sobre la derivada de una función creciente)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente.

Entonces, $f'(x)$ existe para c.t.p. x en (a, b).

Proposición (sobre la integral de la derivada de una función creciente)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente.

Entonces, f' es medible y

$$\int_{[a,b]} f' \,\mathrm{d}\mu \leq f(b) - f(a).$$

Contenido

Plan

Cubiertas de Vitali (definición)

$\mu :=$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$,

$\mu^* :=$ la medida exterior asociada a μ.

Cubiertas de Vitali (definición)

$\mu :=$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$,
$\mu^* :=$ la medida exterior asociada a μ.

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{V} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$. Se dice que $\mathcal{V}$ es una cubierta de Vitali de X, si:

1) $\forall A \in \mathcal{V} \quad \big(A \text{ es un intervalo} \quad \wedge \quad \mu(A) > 0\big)$,
2) $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathcal{V} \quad \big(x \in A \quad \wedge \quad \mu(A) < \varepsilon\big)$.

Lema de Vitali (repaso)

Teorema

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $\mu^*(X) < +\infty$, $\mathcal{V}$ una cubierta de Vitali de X, $\varepsilon > 0$.

Entonces, existen $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{V}$ tales que $A_1, \ldots, A_n$ son disjuntos a pares y

$$\mu^*\left(X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) < \varepsilon.$$

Derivadas de Dini (definición)

Sean A un invervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$ una función, $x\in\operatorname{int}(A)$.

$$(D^+ f)(x) := \limsup_{t\to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \qquad (D_+ f)(x) := \liminf_{t\to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

$$(D^- f)(x) := \limsup_{t\to x^-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \qquad (D_- f)(x) := \liminf_{t\to x^-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Propiedades elementales de las derivadas de Dini (repaso)

Proposición

$$(D_+ f)(x) \le (D^+ f)(x), \qquad (D_- f)(x) \le (D^- f)(x).$$

Propiedades elementales de las derivadas de Dini (repaso)

Proposición

$$(D_+ f)(x) \leq (D^+ f)(x), \qquad (D_- f)(x) \leq (D^- f)(x).$$

Proposición

f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+ f)(x) \leq (D_- f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^- f)(x) \leq (D_+ f)(x).$$

Algunas propiedades de sup e inf

Proposición

Sean $P \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $u \in \mathbb{R}$, $\inf(P) > u$. Entonces,

Algunas propiedades de sup e inf

Proposición

Sean $P \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $u \in \mathbb{R}$, $\inf(P) > u$. Entonces,

$$\forall p \in P \qquad p > u.$$

Algunas propiedades de sup e inf

Proposición

Sean $P \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $u \in \mathbb{R}$, $\inf(P) > u$. Entonces,

$$\forall p \in P \qquad p > u.$$

Proposición

Sean $P \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $u \in \mathbb{R}$, $\sup(P) > u$. Entonces,

Algunas propiedades de sup e inf

Proposición

Sean $P \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $u \in \mathbb{R}$, $\inf(P) > u$. Entonces,

$$\forall p \in P \qquad p > u.$$

Proposición

Sean $P \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $u \in \mathbb{R}$, $\sup(P) > u$. Entonces,

$$\exists p \in P \qquad p > u.$$

Proposición (análisis de la desigualdad $(D^+ f)(y) > u$)

Sean A un intervalo, $f : A \to \mathbb{R}$, $y \in \operatorname{int}(A)$, $u \in \mathbb{R}$, $(D^+ f)(y) > u$. Entonces,

$$\forall \delta > 0 \qquad \exists \eta \in (0, \delta) \qquad \Big(y + \eta \in A \qquad \wedge \qquad f(y + \eta) - f(y) > u\,\eta \Big).$$

Proposición (análisis de la desigualdad $(D^+f)(y) > u$)

Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $y \in \operatorname{int}(A)$, $u \in \mathbb{R}$, $(D^+f)(y) > u$. Entonces,

$$\forall \delta > 0 \qquad \exists \eta \in (0, \delta) \qquad \Big(y + \eta \in A \qquad \wedge \qquad f(y+\eta) - f(y) > u\,\eta\Big).$$

Demostración. Tenemos que $\displaystyle \inf_{\delta>0} \sup_{t\in(y,y+\delta)\cap A} \frac{f(t) - f(y)}{t - y} = (D^+f)(y) > u.$

Proposición (análisis de la desigualdad $(D^+f)(y) > u$)

Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $y \in \operatorname{int}(A)$, $u \in \mathbb{R}$, $(D^+f)(y) > u$. Entonces,

$$\forall \delta > 0 \qquad \exists \eta \in (0, \delta) \qquad \Big(y + \eta \in A \qquad \wedge \qquad f(y+\eta) - f(y) > u\,\eta\Big).$$

Demostración. Tenemos que $\inf\limits_{\delta>0} \sup\limits_{t\in(y,y+\delta)\cap A} \dfrac{f(t)-f(y)}{t-y} = (D^+f)(y) > u.$

Sea $\delta > 0$. Entonces,

Proposición (análisis de la desigualdad $(D^+f)(y) > u$)

Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $y \in \operatorname{int}(A)$, $u \in \mathbb{R}$, $(D^+f)(y) > u$. Entonces,

$$\forall \delta > 0 \qquad \exists \eta \in (0, \delta) \qquad \Big(y + \eta \in A \qquad \wedge \qquad f(y+\eta) - f(y) > u\,\eta \Big).$$

Demostración. Tenemos que $\displaystyle \inf_{\delta>0} \sup_{t \in (y, y+\delta) \cap A} \frac{f(t) - f(y)}{t - y} = (D^+f)(y) > u.$

Sea $\delta > 0$. Entonces, $\displaystyle \sup_{t \in (y, y+\delta) \cap A} \frac{f(t) - f(y)}{t - y} > u.$

Proposición (análisis de la desigualdad $(D^+f)(y) > u$)

Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $y \in \operatorname{int}(A)$, $u \in \mathbb{R}$, $(D^+f)(y) > u$. Entonces,

$$\forall \delta > 0 \qquad \exists \eta \in (0, \delta) \qquad \Big(y + \eta \in A \qquad \wedge \qquad f(y+\eta) - f(y) > u\,\eta\Big).$$

Demostración. Tenemos que $\inf\limits_{\delta>0} \sup\limits_{t\in(y,y+\delta)\cap A} \dfrac{f(t)-f(y)}{t-y} = (D^+f)(y) > u.$

Sea $\delta > 0$. Entonces, $\sup\limits_{t\in(y,y+\delta)\cap A} \dfrac{f(t)-f(y)}{t-y} > u.$

Luego existe t en $(y, y+\delta) \cap A$ tal que $\dfrac{f(t)-f(y)}{t-y} > u.$

Pongamos $\eta = t - y$. $\square$

Análisis de la desigualdad $(D\_f)(x) < v$

Ejercicio

Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$, $v \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $(D\_f)(x) < v$. Demostrar que

$$\forall \delta > 0 \qquad \exists \xi \in (0, \delta) \qquad \Big(x - \xi \in A \qquad \wedge \qquad f(x) - f(x - \xi) < v\,\xi \Big).$$

Un lema sobre intervalos

Supongamos que $m, n \in \mathbb{N}$,

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \ldots \leq a_m \leq b_m,$$

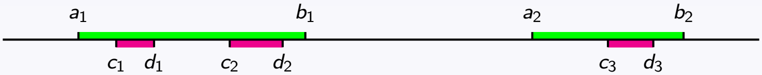
$$c_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq d_2 \leq \ldots \leq c_n \leq d_n,$$

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad \exists j \in \{1, \ldots, m\} \qquad [c_k, d_k] \subseteq [a_j, b_j].$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} (d_k - c_k) \leq \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j).$$

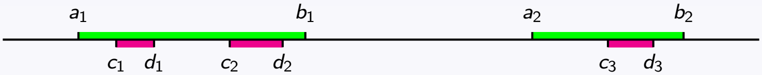
Ejemplo para el lema



En este ejemplo

$$(d_1 - c_1) + (d_2 - c_2) + (d_3 - c_3) \leq (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2).$$

Ejemplo para el lema



En este ejemplo

$$(d_1 - c_1) + (d_2 - c_2) + (d_3 - c_3) \leq (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2).$$

Problema. Escribir bien una demostración general.

Sugerencia: inducción sobre n.

Un lema sobre intervalos y una función creciente

Sean $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ una función creciente,

$[x_1-\xi_1, x_1], \ldots, [x_m-\xi_m, x_m]$ una lista disjunta de intervalos $\subseteq [\alpha,\beta]$,

$[y_1, y_1+\eta_1], \ldots, [y_n, y_n+\eta_n]$ una lista disjunta de intervalos,

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\} \qquad \exists j \in \{1,\ldots,m\} \qquad [y_k, y_k+\eta_k] \subseteq [x_j-\xi_j, x_j].$$

Entonces $$\sum_{k=1}^{n} (f(y_k+\eta_k) - f(y_k)) \le \sum_{j=1}^{m} (f(x_j) - f(x_j-\xi_j)).$$

Un lema sobre intervalos y una función creciente

Sean $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ una función creciente,

$[x_1 - \xi_1, x_1], \ldots, [x_m - \xi_m, x_m]$ una lista disjunta de intervalos $\subseteq [\alpha,\beta]$,

$[y_1, y_1 + \eta_1], \ldots, [y_n, y_n + \eta_n]$ una lista disjunta de intervalos,

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\} \qquad \exists j \in \{1,\ldots,m\} \qquad [y_k, y_k + \eta_k] \subseteq [x_j - \xi_j, x_j].$$

Entonces $$\sum_{k=1}^{n} (f(y_k + \eta_k) - f(y_k)) \le \sum_{j=1}^{m} (f(x_j) - f(x_j - \xi_j)).$$

Idea de demostración. Aplicar el lema anterior con

$$a_j =$$

Un lema sobre intervalos y una función creciente

Sean $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ una función creciente,

$[x_1-\xi_1, x_1], \ldots, [x_m-\xi_m, x_m]$ una lista disjunta de intervalos $\subseteq [\alpha,\beta]$,

$[y_1, y_1+\eta_1], \ldots, [y_n, y_n+\eta_n]$ una lista disjunta de intervalos,

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\} \qquad \exists j \in \{1,\ldots,m\} \qquad [y_k, y_k+\eta_k] \subseteq [x_j-\xi_j, x_j].$$

Entonces
$$\sum_{k=1}^{n} (f(y_k+\eta_k) - f(y_k)) \le \sum_{j=1}^{m} (f(x_j) - f(x_j-\xi_j)).$$

Idea de demostración. Aplicar el lema anterior con

$$a_j = f(x_j-\xi_j), \qquad b_j =$$

Un lema sobre intervalos y una función creciente

Sean $f\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ una función creciente,
$[x_1-\xi_1,x_1],\ldots,[x_m-\xi_m,x_m]$ una lista disjunta de intervalos $\subseteq[\alpha,\beta]$,
$[y_1,y_1+\eta_1],\ldots,[y_n,y_n+\eta_n]$ una lista disjunta de intervalos,

$$\forall k\in\{1,\ldots,n\}\qquad\exists j\in\{1,\ldots,m\}\qquad[y_k,y_k+\eta_k]\subseteq[x_j-\xi_j,x_j].$$

Entonces $$\sum_{k=1}^{n}(f(y_k+\eta_k)-f(y_k))\le\sum_{j=1}^{m}(f(x_j)-f(x_j-\xi_j)).$$

Idea de demostración. Aplicar el lema anterior con

$$a_j=f(x_j-\xi_j),\qquad b_j=f(x_j),\qquad c_k=$$

Un lema sobre intervalos y una función creciente

Sean $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función creciente,
$[x_1 - \xi_1, x_1], \ldots, [x_m - \xi_m, x_m]$ una lista disjunta de intervalos $\subseteq [\alpha, \beta]$,
$[y_1, y_1 + \eta_1], \ldots, [y_n, y_n + \eta_n]$ una lista disjunta de intervalos,

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad \exists j \in \{1, \ldots, m\} \qquad [y_k, y_k + \eta_k] \subseteq [x_j - \xi_j, x_j].$$

Entonces $$\sum_{k=1}^{n} (f(y_k + \eta_k) - f(y_k)) \le \sum_{j=1}^{m} (f(x_j) - f(x_j - \xi_j)).$$

Idea de demostración. Aplicar el lema anterior con

$$a_j = f(x_j - \xi_j), \qquad b_j = f(x_j), \qquad c_k = f(y_k), \qquad d_k =$$

Un lema sobre intervalos y una función creciente

Sean $f\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ una función creciente,
$[x_1-\xi_1, x_1], \ldots, [x_m-\xi_m, x_m]$ una lista disjunta de intervalos $\subseteq [\alpha,\beta]$,
$[y_1, y_1+\eta_1], \ldots, [y_n, y_n+\eta_n]$ una lista disjunta de intervalos,

$$\forall k\in\{1,\ldots,n\}\qquad \exists j\in\{1,\ldots,m\}\qquad [y_k, y_k+\eta_k]\subseteq [x_j-\xi_j, x_j].$$

Entonces $$\sum_{k=1}^{n}(f(y_k+\eta_k)-f(y_k))\le\sum_{j=1}^{m}(f(x_j)-f(x_j-\xi_j)).$$

Idea de demostración. Aplicar el lema anterior con

$$a_j=f(x_j-\xi_j),\qquad b_j=f(x_j),\qquad c_k=f(y_k),\qquad d_k=f(y_k+\eta_k).$$

Plan

Teorema (sobre la derivada de la función creciente)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente.

Entonces $f'(x)$ existe para c.t.p. x en (a, b).

Reducción del teorema al lema principal

Es suficiente verificar que para c.t.p. x

$$(D^+ f)(x) \le (D_- f)(x), \qquad (D^- f)(x) \le (D_+ f)(x).$$

Vamos a demostrar solamente que $D^+ f \le D_- f$ en c.t.p. ($D^- f \le D_+ f$ es similar).

Reducción del teorema al lema principal

Lema

$(D^+ f)(x) > (D_- f)(x)$ si, y solo si,

$$\exists u, v \in \mathbb{Q} \qquad \Big((D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad u > v \quad \wedge \quad v > (D_- f)(x) \Big).$$

Reducción del teorema al lema principal

Lema

$(D^+f)(x) > (D_-f)(x)$ si, y solo si,

$$\exists u, v \in \mathbb{Q} \qquad \Big((D^+f)(x) > u \quad \wedge \quad u > v \quad \wedge \quad v > (D_-f)(x)\Big).$$

Demostración.

$\Longrightarrow$

Reducción del teorema al lema principal

Lema

$(D^+f)(x) > (D_-f)(x)$ si, y solo si,

$$\exists u, v \in \mathbb{Q} \qquad \Big((D^+f)(x) > u \quad \wedge \quad u > v \quad \wedge \quad v > (D_-f)(x)\Big).$$

Demostración.

$\Longrightarrow$ por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

$\Longleftarrow$

Reducción del teorema al lema principal

Lema

$(D^+f)(x) > (D_-f)(x)$ si, y solo si,

$$\exists u, v \in \mathbb{Q} \qquad \Big((D^+f)(x) > u \quad \wedge \quad u > v \quad \wedge \quad v > (D_-f)(x)\Big).$$

Demostración.

$\Longrightarrow$ por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

$\Longleftarrow$ por la transitividad de $>$. $\square$

Reducción del teorema al lema principal

Para cada u, v en $\mathbb{Q}$ con $u > v$, pongamos

$$E_{u,v} := \Big\{x \in (a,b)\colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad v > (D_- f)(x)\Big\}.$$

Entonces,

$$\Big\{x \in (a,b)\colon \quad (D^+ f)(x) > (D_- f)(x)\Big\} = \bigcup_{u,v\in\mathbb{Q}\colon\ u>v} E_{u,v},$$

Es suficiente probar que $\mu^*(E_{u,v}) = 0$.

Plan

Parte principal de la demostración del teorema

Al demostrar el siguiente resultado, tendremos demostrado el teorema sobre la derivada de una función creciente.

Lema (la parte principal del teorema de la derivada de función creciente)

Sean $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, $u, v \in \mathbb{R}$, $u > v$,

$$E_{u,v} := \Big\{ x \in (a,b)\colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v \Big\}.$$

Entonces, $\mu^*(E_{u,v}) = 0$.

Idea intuitiva de la demostración

$$E_{u,v} := \Big\{x \in (a,b)\colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v\Big\}, \qquad s := \mu^*(E_{u,v}).$$

Idea intuitiva de la demostración

$$E_{u,v} := \left\{x \in (a,b)\colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v\right\}, \qquad s := \mu^*(E_{u,v}).$$

Vamos a encontrar dos listas de intervalos, $[x_j - \xi_j, x_j]_{j=1}^m$, $[y_k, y_k + \eta_k]_{k=1}^n$, tales que

Idea intuitiva de la demostración

$$E_{u,v} := \left\{ x \in (a,b) \colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v \right\}, \qquad s := \mu^*(E_{u,v}).$$

Vamos a encontrar dos listas de intervalos, $[x_j - \xi_j, x_j]_{j=1}^m$, $[y_k, y_k + \eta_k]_{k=1}^n$, tales que

- $\displaystyle\sum_{j=1}^m \xi_j \approx s, \qquad \sum_{k=1}^n \eta_k \approx s,$

Idea intuitiva de la demostración

$$E_{u,v} := \left\{x \in (a,b) : \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v\right\}, \qquad s := \mu^*(E_{u,v}).$$

Vamos a encontrar dos listas de intervalos, $[x_j - \xi_j, x_j]_{j=1}^m$, $[y_k, y_k + \eta_k]_{k=1}^n$, tales que

- $\displaystyle\sum_{j=1}^m \xi_j \approx s, \qquad \sum_{k=1}^n \eta_k \approx s,$
- cada $[y_k, y_k + \eta_k]$ está contenido en uno de los $[x_j - \xi_j, x_j]$,

Idea intuitiva de la demostración

$$E_{u,v} := \Big\{ x \in (a,b) \colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v \Big\}, \qquad s := \mu^*(E_{u,v}).$$

Vamos a encontrar dos listas de intervalos, $[x_j - \xi_j, x_j]_{j=1}^m$, $[y_k, y_k + \eta_k]_{k=1}^n$, tales que

- $\displaystyle\sum_{j=1}^m \xi_j \approx s, \qquad \sum_{k=1}^n \eta_k \approx s,$
- cada $[y_k, y_k + \eta_k]$ está contenido en uno de los $[x_j - \xi_j, x_j]$,
- en los intervalos $[x_j - \xi_j, x_j]$ la función f crece lentamente,

Idea intuitiva de la demostración

$$E_{u,v} := \Big\{x \in (a,b) \colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v\Big\}, \qquad s := \mu^*(E_{u,v}).$$

Vamos a encontrar dos listas de intervalos, $[x_j - \xi_j, x_j]_{j=1}^m$, $[y_k, y_k + \eta_k]_{k=1}^n$, tales que

- $\displaystyle\sum_{j=1}^m \xi_j \approx s, \qquad \sum_{k=1}^n \eta_k \approx s,$
- cada $[y_k, y_k + \eta_k]$ está contenido en uno de los $[x_j - \xi_j, x_j]$,
- en los intervalos $[x_j - \xi_j, x_j]$ la función f crece lentamente,
- en los intervalos $[y_k, y_k + \eta_k]$ la función f crece rápidamente.

Idea intuitiva de la demostración

$$E_{u,v} := \left\{x \in (a,b) \colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v\right\}, \qquad s := \mu^*(E_{u,v}).$$

Vamos a encontrar dos listas de intervalos, $[x_j - \xi_j, x_j]_{j=1}^m$, $[y_k, y_k + \eta_k]_{k=1}^n$, tales que

- $\displaystyle\sum_{j=1}^m \xi_j \approx s, \qquad \sum_{k=1}^n \eta_k \approx s,$
- cada $[y_k, y_k + \eta_k]$ está contenido en uno de los $[x_j - \xi_j, x_j]$,
- en los intervalos $[x_j - \xi_j, x_j]$ la función f crece lentamente,
- en los intervalos $[y_k, y_k + \eta_k]$ la función f crece rápidamente.

Luego tendremos $us \leq vs$, lo cual es posible solo cuando $s = 0$.

Demostración.

$$E_{u,v} := \Big\{ x \in (a,b) \colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v \Big\}.$$

Demostración.

$$E_{u,v} := \Big\{ x \in (a,b) \colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v \Big\}.$$

1. Sea $s = \mu^*(E_{u,v})$. Elijamos $\varepsilon > 0$ arbitrario.
Usando una descripción de μ^* encontramos G abierto tal que

$$E_{u,v} \subseteq G \subseteq (a,b), \qquad \mu(G) < s + \varepsilon.$$

$$E_{u,v} = \Big\{ x \in (a,b) \colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v \Big\} \quad \subseteq \quad G \quad \subseteq \quad (a,b).$$

$$E_{u,v} = \Big\{ x \in (a,b) \colon \quad (D^{+} f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_{-} f)(x) < v \Big\} \quad \subseteq \quad G \quad \subseteq \quad (a,b).$$

2. Para cada x en $E_{u,v}$ y cada $\delta > 0$, usando la condición $(D_{-} f)(x) < v$, encontramos $\xi_{x,\delta}$ en $(0,\delta)$ tal que

$$x - \xi_{\delta,x} \in G, \qquad f(x) - f(x - \xi_{\delta,x}) < v\,\xi_{\delta,x}.$$

$$E_{u,v} = \Big\{ x \in (a,b) \colon \quad (D^+ f)(x) > u \quad \wedge \quad (D_- f)(x) < v \Big\} \quad \subseteq \quad G \quad \subseteq \quad (a,b).$$

2. Para cada x en $E_{u,v}$ y cada $\delta > 0$, usando la condición $(D_- f)(x) < v$, encontramos $\xi_{x,\delta}$ en $(0,\delta)$ tal que

$$x - \xi_{\delta,x} \in G, \qquad f(x) - f(x - \xi_{\delta,x}) < v\,\xi_{\delta,x}.$$

La colección $\{[x - \xi_{\delta,x}, x] \colon\ x \in E_{u,v},\ \delta > 0\}$ es una cubierta de Vitali de $E_{u,v}$.

3. El lema de Vitali nos da una subcubierta disjunta $([x_j - \xi_j, x_j])_{1 \le j \le m}$ tal que

$$\mu^* \left(E_{u,v} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} [x_j - \xi_j, x_j] \right) \right) < \varepsilon.$$

3. El lema de Vitali nos da una subcubierta disjunta $([x_j - \xi_j, x_j])_{1 \le j \le m}$ tal que

$$\mu^*\left(E_{u,v} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} [x_j - \xi_j, x_j]\right)\right) < \varepsilon.$$

Pongamos

$$A := E_{u,v} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} (x_j - \xi_j, x_j)\right).$$

Por la propiedad subaditiva de μ^*, $\quad \mu^*(A) > s - \varepsilon$.

3. El lema de Vitali nos da una subcubierta disjunta $([x_j - \xi_j, x_j])_{1\le j\le m}$ tal que

$$\mu^*\left(E_{u,v} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m}[x_j - \xi_j, x_j]\right)\right) < \varepsilon.$$

Pongamos

$$A := E_{u,v} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m}(x_j - \xi_j, x_j)\right).$$

Por la propiedad subaditiva de μ^*, $\quad \mu^*(A) > s - \varepsilon$.

Por otro lado,

$$\sum_{j=1}^{m}\xi_j = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m}(x_j - \xi_j, x_j)\right) \le \mu(G) < s + \varepsilon.$$

$$A = E_{u,v} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} (x_j - \xi_j, x_j) \right), \qquad \mu^*(A) > s - \varepsilon.$$

4. Dados y en A y $\delta > 0$, primero encontramos j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $y \in (x_j - \xi_j, x_j)$.

$$A = E_{u,v} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} (x_j - \xi_j, x_j) \right), \qquad \mu^*(A) > s - \varepsilon.$$

4. Dados y en A y $\delta > 0$, primero encontramos j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $y \in (x_j - \xi_j, x_j)$. Luego, usando la condición $(D^+ f)(y) > u$, encontramos $\eta_{y,\delta}$ en $(0, \delta)$ tal que

$$y + \eta_{y,\delta} \in (x_j - \xi_j, x_j), \qquad f(y + \eta_{y,\delta}) - f(y) > u\, \eta_{y,\delta}.$$

$$A = E_{u,v} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} (x_j - \xi_j, x_j) \right), \qquad \mu^*(A) > s - \varepsilon.$$

4. Dados y en A y $\delta > 0$, primero encontramos j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $y \in (x_j - \xi_j, x_j)$. Luego, usando la condición $(D^+ f)(y) > u$, encontramos $\eta_{y,\delta}$ en $(0, \delta)$ tal que

$$y + \eta_{y,\delta} \in (x_j - \xi_j, x_j), \qquad f(y + \eta_{y,\delta}) - f(y) > u\, \eta_{y,\delta}.$$

La colección $\{[y, y + \eta_{y,\delta}] \colon\; y \in A,\; \delta > 0\}$ es una cubierta de Vitali de A.

$$A = E_{u,v} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} (x_j - \xi_j, x_j) \right), \qquad \mu^*(A) > s - \varepsilon.$$

4. Dados y en A y $\delta > 0$, primero encontramos j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $y \in (x_j - \xi_j, x_j)$. Luego, usando la condición $(D^+ f)(y) > u$, encontramos $\eta_{y,\delta}$ en $(0, \delta)$ tal que

$$y + \eta_{y,\delta} \in (x_j - \xi_j, x_j), \qquad f(y + \eta_{y,\delta}) - f(y) > u\, \eta_{y,\delta}.$$

La colección $\{[y, y + \eta_{y,\delta}] \colon\ y \in A,\ \delta > 0\}$ es una cubierta de Vitali de A.

Sea $([y_k, y_k + \eta_k])_{1 \le k \le n}$ una subcubierta finita disjunta tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \eta_k > s - 2\varepsilon$.

Final de la demostración

5. Para cada k, existe j tal que $(y_k, y_k + \eta_k) \subseteq (x_j - \xi_j, x_j)$. Luego

$$\sum_{k=1}^{n} (f(y_k + \eta_k) - f(y_k)) \leq \sum_{j=1}^{m} (f(x_j + \xi_j) - f(x_j))$$

Final de la demostración

5. Para cada k, existe j tal que $(y_k, y_k + \eta_k) \subseteq (x_j - \xi_j, x_j)$. Luego

$$
\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(f(y_k+\eta_k)-f(y_k)) & \leq & \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(f(x_j+\xi_j)-f(x_j)) \\
\vee & & \wedge \\
\displaystyle u\sum_{k=1}^{n}\eta_k & & \displaystyle v\sum_{j=1}^{m}\xi_j
\end{array}
$$

Final de la demostración

5. Para cada k, existe j tal que $(y_k, y_k + \eta_k) \subseteq (x_j - \xi_j, x_j)$. Luego

$$
\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(f(y_k+\eta_k)-f(y_k)) & \leq & \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(f(x_j+\xi_j)-f(x_j)) \\
\vee & & \wedge \\
\displaystyle u\sum_{k=1}^{n}\eta_k & & \displaystyle v\sum_{j=1}^{m}\xi_j \\
\vee & & \wedge \\
u(s-2\varepsilon) & & v(s+\varepsilon).
\end{array}
$$

Como ε es arbitrario, $us \leq vs$. Pero $u > v$. Esto implica que $s = 0$.

Plan

Proposición (sobre la integral de la derivada de una función creciente)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente.

Entonces, f' es medible y

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \le f(b) - f(a).$$

Inicio de la demostración.

Por el teorema, existe f' c.t.p.

Inicio de la demostración.

Por el teorema, existe f' c.t.p. Definimos $g_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$,

Inicio de la demostración.

Por el teorema, existe f' c.t.p. Definimos $g_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g_n(x) := \begin{cases} n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right), & x+\frac{1}{n} \in [a,b]; \\ 0, & x+\frac{1}{n} > b. \end{cases}$$

Inicio de la demostración.

Por el teorema, existe f' c.t.p. Definimos $g_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g_n(x) := \begin{cases} n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right), & x+\frac{1}{n} \in [a,b]; \\ 0, & x+\frac{1}{n} > b. \end{cases}$$

Entonces $g_n \to f'$ c.t.p., y f' es medible.

La integral de la derivada, final de la demostración. Apliquemos el lema de Fatou:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x$$

La integral de la derivada, final de la demostración. Apliquemos el lema de Fatou:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_a^{b-1/n} g_n(x)\,\mathrm{d}x$$

La integral de la derivada, final de la demostración. Apliquemos el lema de Fatou:

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x &\le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_a^{b-1/n} g_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_a^{b-1/n} f(x+1/n)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right)\end{aligned}$$

La integral de la derivada, final de la demostración. Apliquemos el lema de Fatou:

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x &\le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_a^{b-1/n} g_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_a^{b-1/n} f(x+1/n)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right)\end{aligned}$$

La integral de la derivada, final de la demostración. Apliquemos el lema de Fatou:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_a^{b-1/n} g_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_a^{b-1/n} f(x+1/n)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_{b-1/n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{a+1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right)
\end{aligned}$$

La integral de la derivada, final de la demostración. Apliquemos el lema de Fatou:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_a^{b-1/n} g_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n\int_a^{b-1/n} f(x+1/n)\,\mathrm{d}x - n\int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n\int_{a+1/n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - n\int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n\int_{b-1/n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - n\int_a^{a+1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \left(n\int_{b-1/n}^{b} f(b)\,\mathrm{d}x - n\int_a^{a+1/n} f(a)\,\mathrm{d}x \right)
\end{aligned}$$

La integral de la derivada, final de la demostración. Apliquemos el lema de Fatou:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x &\le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_a^{b-1/n} g_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_a^{b-1/n} f(x+1/n)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_{b-1/n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{a+1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_{b-1/n}^{b} f(b)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{a+1/n} f(a)\,\mathrm{d}x \right) = f(b) - f(a).
\end{aligned}
$$

Ejemplo que veremos en el futuro: la escalera de Cantor

Existe una función continua y creciente $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(0) < f(1) \qquad \text{y} \qquad f' = 0 \ \text{ c.t.p.}$$

Ejemplo que veremos en el futuro: la escalera de Cantor

Existe una función continua y creciente $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(0) < f(1) \qquad \text{y} \qquad f' = 0 \ \text{ c.t.p.}$$

Para esta función

$$\int_{[0,1]} f' \, \mathrm{d}\mu = 0 < f(1) - f(0).$$