Criterio de límite en términos de sucesiones (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2024-11-21

Objetivo:

demostrar el teorema de Heine, es decir, el criterio de límite en términos de sucesiones.

Objetivo:

demostrar el teorema de Heine, es decir, el criterio de límite en términos de sucesiones.

Prerrequisitos:

espacios métricos, espacios topológicos, base de vecindades.

Objetivo:

demostrar el teorema de Heine, es decir, el criterio de límite en términos de sucesiones.

Prerrequisitos:

espacios métricos, espacios topológicos, base de vecindades.

Una de aplicaciones futuras:

aplicar el teorema de la convergencia dominada a familias de funciones,
no necesariamente numerables.

Vecindades y límites

Sea (X, τ) un espacio topológico.

Vecindades y límites

Sea (X, τ) un espacio topológico.

Dado a en X, pongamos $\tau(a) := \{V \in \tau : \; a \in V\}$.

Vecindades y límites

Sea (X, τ) un espacio topológico.

Dado a en X, pongamos $\tau(a) := \{V \in \tau : \ a \in V\}$.

Recordemos la definición del límite.

Vecindades y límites

Sea (X, τ) un espacio topológico.

Dado a en X, pongamos $\tau(a) := \{V \in \tau : \ a \in V\}$.

Recordemos la definición del límite.

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $a \in X$, $b \in Y$, $f : X \to Y$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Variaciones de la definición del límite

Definición 1.

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $D \subseteq X$, $f \colon D \to Y$, $a \in \mathrm{cl}(D)$, $b \in Y$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[D \cap (V \setminus \{a\})] \subseteq Q.$$

Variaciones de la definición del límite

Definición 1.

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $D \subseteq X$, $f \colon D \to Y$, $a \in \mathrm{cl}(D)$, $b \in Y$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[D \cap (V \setminus \{a\})] \subseteq Q.$$

Definición 2.

En las mismas suposiciones,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[D \cap V] \subseteq Q.$$

Variaciones de la definición del límite

Definición 1.

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $D \subseteq X$, $f\colon D \to Y$, $a \in \operatorname{cl}(D)$, $b \in Y$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[D \cap (V \setminus \{a\})] \subseteq Q.$$

Definición 2.

En las mismas suposiciones,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[D \cap V] \subseteq Q.$$

En general, las Definiciones 1 y 2 no son equivalentes.

Hay casos particulares, cuando son equivalentes: 1) si $a \notin D$; 2) si $f(a) = b$.

Una base local de una topología en un punto

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $a \in X$.

Una colección $\mathcal{W}$ se llama base local de τ en a, si cumple con dos propiedades:

- $\mathcal{W} \subseteq \tau(a)$,
- $\forall V \in \tau(a) \quad \exists W \in \mathcal{W} \quad W \subseteq V$.

Una base local de una topología en un punto

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $a \in X$.

Una colección $\mathcal{W}$ se llama base local de τ en a, si cumple con dos propiedades:

- $\mathcal{W} \subseteq \tau(a)$,
- $\forall V \in \tau(a) \quad \exists W \in \mathcal{W} \quad W \subseteq V$.

Ejemplo trivial: $\tau(a)$ es una base local de τ en a.

Una base local de una topología en un punto

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $a \in X$.

Una colección $\mathcal{W}$ se llama base local de τ en a, si cumple con dos propiedades:

- $\mathcal{W} \subseteq \tau(a)$,
- $\forall V \in \tau(a) \quad \exists W \in \mathcal{W} \quad W \subseteq V$.

Ejemplo trivial: $\tau(a)$ es una base local de τ en a.

En vez de una colección, a veces es más cómodo trabajar con una familia.

Una familia $(W_k)_{k \in J}$ se llama base local de τ en a,

si cumple con dos propiedades:

- $\{W_k\colon\ k \in J\} \subseteq \tau(a)$,
- $\forall V \in \tau(a) \quad \exists k \in J \quad W_k \subseteq V$.

Criterio de límite en términos de bases de vecindades

Ejercicio.

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f\colon X \to Y$, $a \in X$, $b \in Y$.

Sea $\mathcal{W}$ una base local de τ_X en a, sea $\mathcal{Q}$ una base local de τ_Y en b.

Demostrar que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall Q \in \mathcal{Q} \qquad \exists W \in \mathcal{W} \qquad f[W \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Bases locales numerables decrecientes

Proposición

Sea (X, τ) un espacio topológico, sea $a \in X$,

y sea $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una base local numerable de τ en a.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos

$$W_k := \bigcap_{j=1}^{k} P_j.$$

Entonces $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ también es una base local de τ en a, y la sucesión $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

Bases locales numerables decrecientes

Proposición

Sea (X,τ) un espacio topológico, sea $a \in X$,

y sea $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una base local numerable de τ en a.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos

$$W_k := \bigcap_{j=1}^{k} P_j.$$

Entonces $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ también es una base local de τ en a, y la sucesión $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

Ejercicio: demostrar la proposición.

Ejemplos de bases locales numerables

Ejercicio.

Sea (X, d) un espacio métrico y sea τ_d la topología inducida por la métrica d.

Para cada a en X y cada $r > 0$,

$$B(a, r) := \{x \in X : \ d(x, a) < r\}.$$

Demostrar que la sucesión de bolas

$$\big(B(a, 1/q)\big)_{q \in \mathbb{N}}$$

es una base local de τ_d en a.

Ejemplos de bases locales numerables

Ejercicio.
Recordar la definición de la topología canónica $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ del eje real extendido $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
Demostrar que la sucesión de intervalos

$$\big((m, +\infty]\big)_{m\in\mathbb{N}}$$

es una base local de la topología $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ en el punto $+\infty$.

Criterio de límite en términos de sucesiones (criterio de Heine)

Teorema

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f\colon X \to Y$, $a \in X$, $b \in Y$.

Supongamos que existe una base local numerable de la topología τ_X en el punto a.

Entonces, las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;

(b) para cualquier sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $X \setminus \{a\}$, si $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = a$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k) = b$.

Criterio de límite en términos de sucesiones (criterio de Heine)

Teorema

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f\colon X \to Y$, $a \in X$, $b \in Y$.

Supongamos que existe una base local numerable de la topología τ_X en el punto a.

Entonces, las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;

(b) para cualquier sucesión $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $X \setminus \{a\}$, si $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = a$, entonces $\lim\limits_{k \to \infty} f(t_k) = b$.

Heinrich Eduard Heine (1821–1881) fue un matemático alemán.

Criterio de límite en términos de sucesiones (criterio de Heine)

Teorema

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f\colon X \to Y$, $a \in X$, $b \in Y$.

Supongamos que existe una base local numerable de la topología τ_X en el punto a.

Entonces, las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;

(b) para cualquier sucesión $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $X \setminus \{a\}$, si $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = a$, entonces $\lim\limits_{k \to \infty} f(t_k) = b$.

Heinrich Eduard Heine (1821–1881) fue un matemático alemán.

Demostremos las implicaciones (a)$\Rightarrow$(b) y $\neg$(a) $\Rightarrow$ $\neg$(b).

Demostración (a)$\Rightarrow$(b)

Demostración (a)⇒(b)

Supongamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n \to \infty} t_n = a$$

Demostración (a)⇒(b)

Supongamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n \to \infty} t_n = a$$

Dado

$$Q \in \tau_Y(b)$$

Demostración (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = a$$

Dado

$$Q \in \tau_Y(b)$$

$$V \in \tau_X(a)$$

$$f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q$$

Demostración (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

$$(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = a$$

Dado

$$Q \in \tau_Y(b)$$

$$V \in \tau_X(a)$$

$$f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q$$

$$k \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \geq k \quad t_n \in V\setminus\{a\}$$

Demostración (a)$\Rightarrow$(b)

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}\text{Supongamos}\\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \;=\; b\end{array} \arrow[dr] & & \begin{array}{c}(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}\\ \lim\limits_{n\to\infty} t_n \;=\; a\end{array} \arrow[dr] & \\
\begin{array}{c}\text{Dado}\\ Q \;\in\; \tau_Y(b)\end{array} \arrow[rr] & & \begin{array}{c}V \;\in\; \tau_X(a)\\ f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q\end{array} \arrow[rr] \arrow[d] & & \begin{array}{c}k \;\in\; \mathbb{N}\\ \forall n \geq k \quad t_n \in V\setminus\{a\}\end{array} \arrow[dll] \\
 & & \begin{array}{c}k \;\in\; \mathbb{N}\\ \forall n \geq k \quad f(t_n) \in Q\end{array} & &
\end{tikzcd}
$$

Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, inicio

La condición (a) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, inicio

La condición (a) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Supongamos que (a) no se cumple:

$$\exists Q \in \tau_Y(b) \qquad \forall V \in \tau_X(a) \qquad f[V \setminus \{a\}] \nsubseteq Q.$$

Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, inicio

La condición (a) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Supongamos que (a) no se cumple:

$$\exists Q \in \tau_Y(b) \qquad \forall V \in \tau_X(a) \qquad f[V \setminus \{a\}] \not\subseteq Q.$$

Elegimos E_0 en $\tau_Y(b)$ con esta propiedad. Entonces,

$$\forall V \in \tau(a) \qquad \exists x \in V \setminus \{a\} \qquad f(x) \notin E_0.$$

Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, inicio

La condición (a) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Supongamos que (a) no se cumple:

$$\exists Q \in \tau_Y(b) \qquad \forall V \in \tau_X(a) \qquad f[V \setminus \{a\}] \not\subseteq Q.$$

Elegimos E_0 en $\tau_Y(b)$ con esta propiedad. Entonces,

$$\forall V \in \tau(a) \qquad \exists x \in V \setminus \{a\} \qquad f(x) \notin E_0.$$

Sea $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base local decreciente de τ_X en a.

Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, inicio

La condición (a) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall Q \in \tau_Y(b) \qquad \exists V \in \tau_X(a) \qquad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Supongamos que (a) no se cumple:

$$\exists Q \in \tau_Y(b) \qquad \forall V \in \tau_X(a) \qquad f[V \setminus \{a\}] \not\subseteq Q.$$

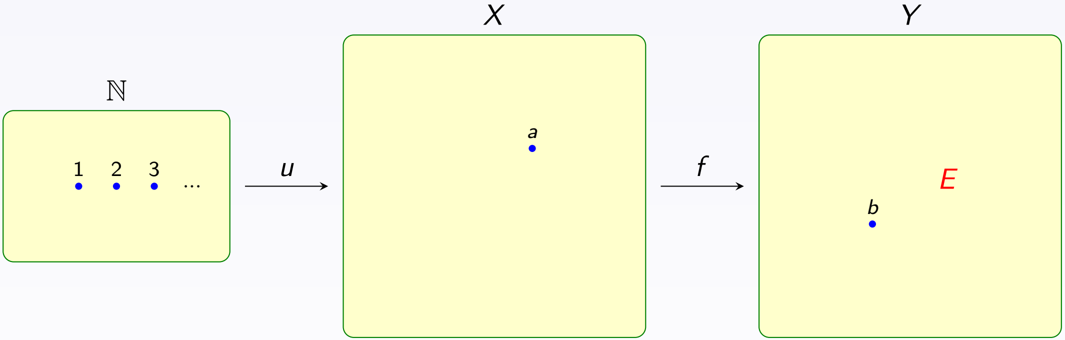
Elegimos E_0 en $\tau_Y(b)$ con esta propiedad. Entonces,

$$\forall V \in \tau(a) \qquad \exists x \in V \setminus \{a\} \qquad f(x) \notin E_0.$$

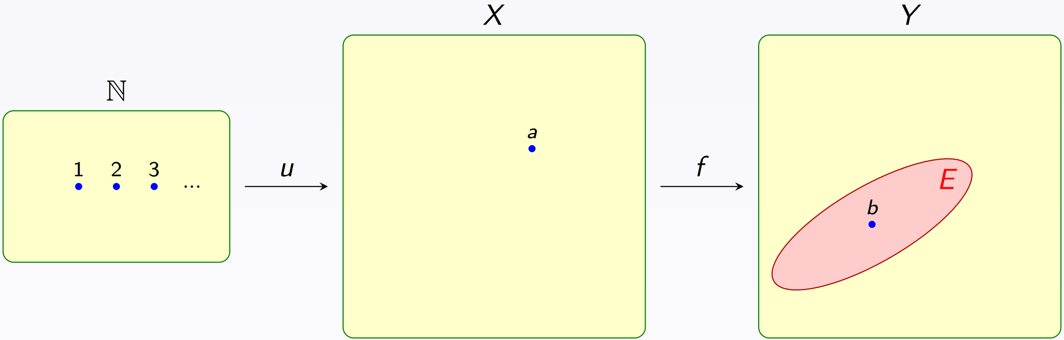
Sea $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base local decreciente de τ_X en a.

Para cada n en $\mathbb{N}$ encontramos $u_n \in W_n \setminus \{a\}$ tal que $f(u_n) \notin E_0$.

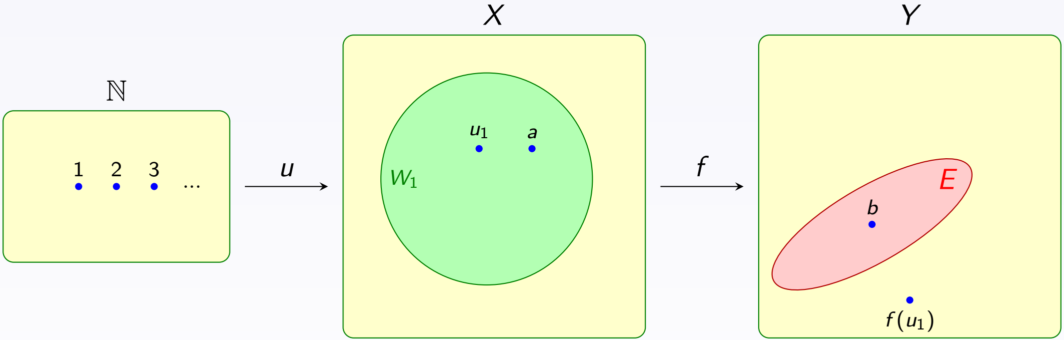
Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo



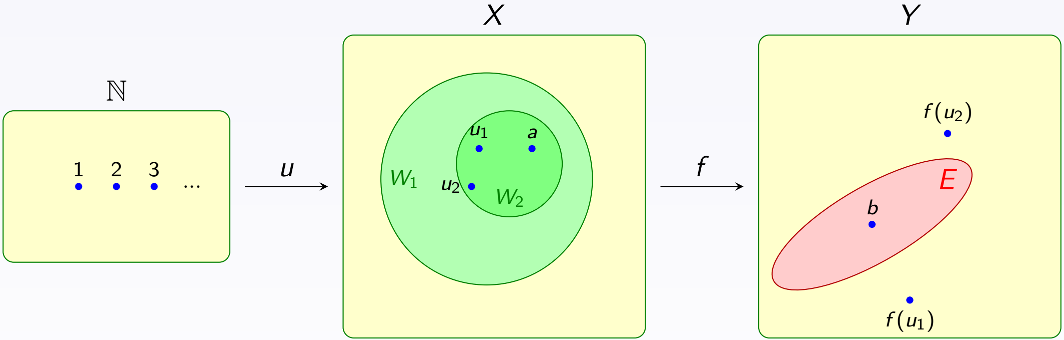
Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo



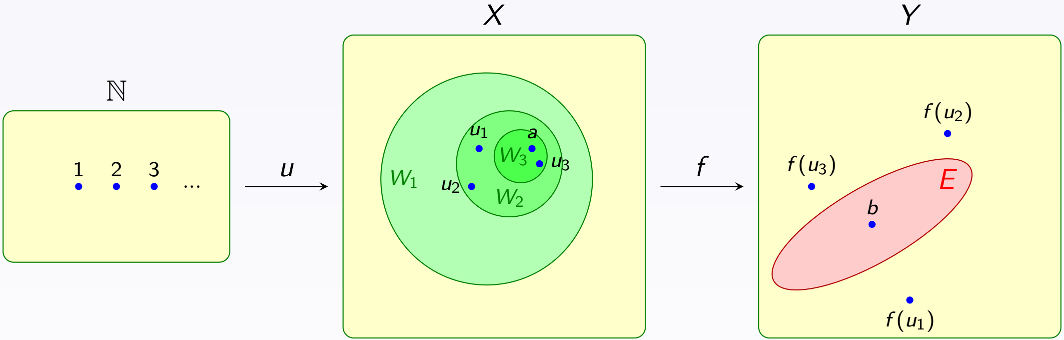
Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo



Demostración (b) ⇒ (a) por reducción al absurdo, dibujo



Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo



Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo

Hemos construido una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t_n \in W_n \setminus \{a\}$

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(t_n) \notin E$

Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo

Hemos construido una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t_n \in W_n \setminus \{a\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(t_n) \notin E$$

Mostremos que $u_n \to a$ cuando $n \to \infty$.

Dado V en $\tau_X(a)$, encontramos k en N tal que $W_k \subseteq V$.

Luego para $n \geq k$ tenemos $u_n \in W_n \subseteq W_k \subseteq V$.

Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo

Hemos construido una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t_n \in W_n \setminus \{a\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(t_n) \notin E$$

Mostremos que $u_n \to a$ cuando $n \to \infty$.

Dado V en $\tau_X(a)$, encontramos k en N tal que $W_k \subseteq V$.

Luego para $n \geq k$ tenemos $u_n \in W_n \subseteq W_k \subseteq V$.

Mostremos que $f(u_n) \not\to b$ cuando $n \to \infty$. En efecto,

$$\exists Q (= E_0) \in \tau_Y(b) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad f(u_n) \notin Q.$$

Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo

Hemos construido una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad t_n \in W_n \setminus \{a\}} \qquad\qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(t_n) \notin E}$$

Mostremos que $u_n \to a$ cuando $n \to \infty$.

Dado V en $\tau_X(a)$, encontramos k en N tal que $W_k \subseteq V$.

Luego para $n \geq k$ tenemos $u_n \in W_n \subseteq W_k \subseteq V$.

Mostremos que $f(u_n) \not\to b$ cuando $n \to \infty$. En efecto,

$$\exists Q (= E_0) \in \tau_Y(b) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad f(u_n) \notin Q.$$

Esto contradice a la suposición (b).

Criterio de continuidad en términos de sucesiones (Heine)

Corolario

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f\colon X \to Y$, $a \in X$.

Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) f es continua en a;

(b) para cualquier sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, si $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_k) = f(a)$.

Un truco útil: intercalar dos sucesiones

Ejercicio.

Sea X un espacio topológico y sean $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X. Definimos

$$v_n := \begin{cases} t_m, & n = 2m-1, \\ u_m & n = 2m. \end{cases}$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\lim_{m\to\infty} t_m = a \qquad \wedge \qquad \lim_{m\to\infty} u_m = a \right).$$

Criterio de existencia del límite en términos de sucesiones

Ejercicio.

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f\colon X \to Y$, $a \in X$.

Supongamos que existe una base local numerable de τ en a.

Supongamos que para cada sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X \setminus \{a\}$,

si $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$, entonces la sucesión $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite en Y.

Demostrar que existe b en Y tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.