Funciones convexas en los intervalos de los reales, y sus derivadas (un tema de Análisis Real)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2021-09-17

Objetivos:

- Dado un intervalo X de $\mathbb{R}$ y una función convexa $f\colon X \to \mathbb{R}$, estudiar las derivadas laterales de f.
- Caracterizar la convexidad de $f\colon X \to \mathbb{R}$ en términos de f' y f''.

Objetivos:

- Dado un intervalo X de $\mathbb{R}$ y una función convexa $f\colon X \to \mathbb{R}$, estudiar las derivadas laterales de f.
- Caracterizar la convexidad de $f\colon X \to \mathbb{R}$ en términos de f' y f''.

Prerrequisitos:

- subconjuntos convexos del eje real,
- criterio de convexidad en términos de las diferencias divididas,
- teorema del valor medio,
- criterio de funciones crecientes en términos de las derivadas.

Aplicaciones

Aplicaciones inmediatas:

- varias desigualdades en cálculo,
- el teorema de la recta básica de la gráfica de una función convexa,
- la desigualdad de Young, la desigualdad de Bernoulli.

Aplicaciones

Aplicaciones inmediatas:

- varias desigualdades en cálculo,
- el teorema de la recta básica de la gráfica de una función convexa,
- la desigualdad de Young, la desigualdad de Bernoulli.

Aplicaciones de mediano plazo:

- la desigualdad integral de Jensen,
- las desigualdades de Hölder y Minkowski.

1. Repaso de herramientas
2. Funciones convexas y derivadas laterales
3. Criterios de convexidad en términos de las derivadas

Repaso: funciones convexas de una variable real

Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es llamada convexa si

$$\forall x, y \in X \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Repaso: funciones convexas de una variable real

Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es llamada convexa si

$$\forall x, y \in X \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Ejercicio. Recordar la definición de la función estrictamente convexa.

Repaso: diferencias divididas del primer orden

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$.

$$\Delta_f(x_1, x_2) := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Repaso: criterio de la convexidad en términos de Δ_f

Teorema

Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

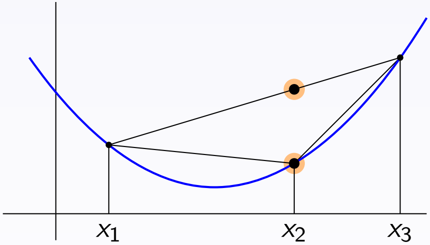
(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

(e) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ para todos x_1, x_2, x_3 en X, diferentes a pares.

El sentido geométrico del criterio de convexidad en términos de Δ_f

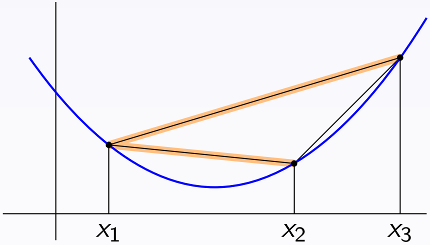
(a) $f(x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3)$,
donde $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$.



El sentido geométrico del criterio de convexidad en términos de Δ_f

(a) $f(x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3)$,
donde $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$.

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3)$.

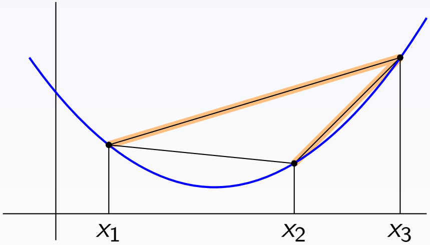


El sentido geométrico del criterio de convexidad en términos de Δ_f

(a) $f(x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3)$,
donde $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$.

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3)$.

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \leq \Delta_f(x_2, x_3)$.



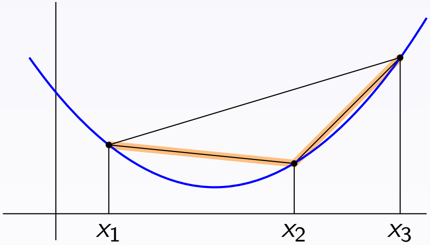
El sentido geométrico del criterio de convexidad en términos de Δ_f

(a) $f(x_2) \le (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3)$,
donde $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$.

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$.

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$.

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$.



Repaso: sobre los límites de la función creciente en los extremos

Proposición

Sean Y un intervalo en $\mathbb{R}$, $\quad u := \inf(Y)$, $\quad v := \sup(Y)$,

y sea $g\colon\ Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función creciente.

Entonces

$$\lim_{\substack{t\to u\\ t>u\\ t\in Y}} g(t) = \inf(g[Y \setminus \{u\}]), \qquad \lim_{\substack{t\to v\\ t<v\\ t\in Y}} g(t) = \sup(g[Y \setminus \{v\}]).$$

Repaso: sobre los límites de la función creciente en los extremos

Proposición

Sean Y un intervalo en $\mathbb{R}$, $u := \inf(Y)$, $v := \sup(Y)$,
y sea $g\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función creciente.
Entonces

$$\lim_{\substack{t\to u\\ t>u\\ t\in Y}} g(t) = \inf(g[Y \setminus \{u\}]), \qquad \lim_{\substack{t\to v\\ t<v\\ t\in Y}} g(t) = \sup(g[Y \setminus \{v\}]).$$

Ejercicio. Recordar una proposición similar sobre las funciones decrecientes.

Definición: derivadas laterales

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $\quad a := \text{ínf}(X), \quad b := \sup(X).$

Sean $f : X \to \mathbb{R}, \quad x \in X.$

Definición: derivadas laterales

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $a := \text{ínf}(X)$, $b := \sup(X)$.

Sean $f\colon X \to \mathbb{R}$, $x \in X$.

Si $x \neq a$, entonces la derivada izquierda de f en x es

$$f'_{\text{izq}}(x) := \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} \Delta_f(x, t), \qquad \text{esto es,} \qquad f'_{\text{izq}}(x) := \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Definición: derivadas laterales

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $\quad a := \text{ínf}(X), \quad b := \sup(X)$.

Sean $f\colon X \to \mathbb{R}, \quad x \in X$.

Si $x \neq a$, entonces la derivada izquierda de f en x es

$$f'_{\text{izq}}(x) := \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} \Delta_f(x, t), \qquad \text{esto es,} \qquad f'_{\text{izq}}(x) := \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

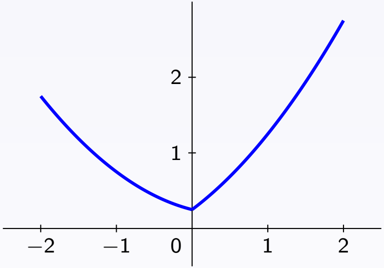
Si $x \neq b$, entonces la derivada derecha de f en x es

$$f'_{\text{der}}(x) := \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} \Delta_f(t, x), \qquad \text{esto es,} \qquad f'_{\text{der}}(x) := \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Ejemplo: función convexa fracturada

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

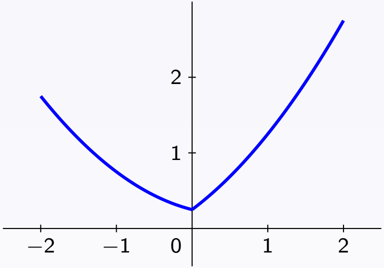
$$f(x) := \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}(1 + |x|)^2.$$



Ejemplo: función convexa fracturada

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f(x) := \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}(1+|x|)^2.$$



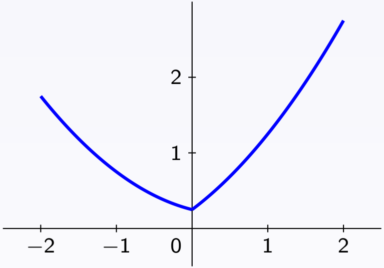
En este ejemplo f es convexa,

$$f'_{\text{izq}}(0) < 0 < f'_{\text{der}}(0).$$

Ejemplo: función convexa fracturada

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f(x) := \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}(1 + |x|)^2.$$



En este ejemplo f es convexa,

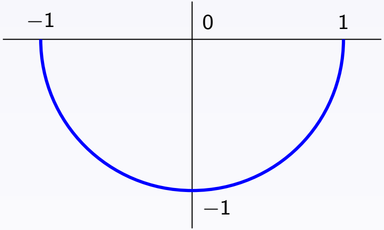
$$f'_{\text{izq}}(0) < 0 < f'_{\text{der}}(0).$$

Ejercicio. Calcular $f'_{\text{izq}}(0)$ y $f'_{\text{der}}(0)$.

Ejemplo: la semicircunferencia inferior ("montaña rusa")

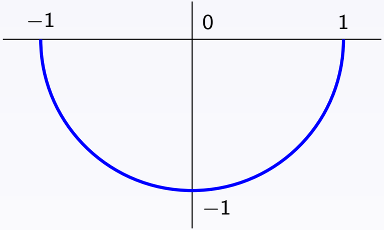
$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R},$$

$$f(x) := -\sqrt{1 - x^2}.$$



Ejemplo: la semicircunferencia inferior ("montaña rusa")

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},$$
$$f(x) := -\sqrt{1-x^2}.$$



En este ejemplo f es convexa,

$$f'_{\text{der}}(-1) = -\infty, \qquad f'_{\text{izq}}(1) = +\infty.$$

Existencia de las derivadas laterales de una función convexa

Proposición

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función convexa.

Sean $a := \operatorname{ínf}(X)$, $b := \sup(X)$.

Si $x \in X \setminus \{a\}$, entonces existe $f'_{\text{izq}}(x)$,

$$f'_{\text{izq}}(x) = \sup_{\substack{t<x\\ t\in X}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \qquad -\infty < f'_{\text{izq}}(x) \le +\infty.$$

Si $x \in X \setminus \{b\}$, entonces existe $f'_{\text{der}}(x)$,

$$f'_{\text{der}}(x) = \operatorname*{ínf}_{\substack{t>x\\ t\in X}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \qquad -\infty \le f'_{\text{der}}(x) < +\infty.$$

Demostración para f'_{izq}, inicio

Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$.

$$Y := X \cap \,]-\infty, x[\, = \{t \in X \colon \ t < x\}.$$

Demostración para f'_{izq}, inicio

Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$.

$$Y := X \cap]-\infty, x[= \{t \in X \colon \ t < x\}.$$

Definimos $g \colon Y \to \mathbb{R}$,

$$g(t) := \Delta_f(t, x) =$$

Demostración para f'_{izq}, inicio

Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$.

$$Y := X \cap]-\infty, x[= \{t \in X \colon \; t < x\}.$$

Definimos $g \colon \; Y \to \mathbb{R}$,

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Demostración para f'_{izq}, inicio

Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$.

$$Y := X \cap]-\infty, x[= \{t \in X \colon \ t < x\}.$$

Definimos $g \colon Y \to \mathbb{R}$,

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Si $t_1, t_2 \in X$ y $t_1 < t_2 < x$, entonces

Demostración para f'_{izq}, inicio

Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$.

$$Y := X \cap]-\infty, x[= \{t \in X : \ t < x\}.$$

Definimos $g \colon Y \to \mathbb{R}$,

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Si $t_1, t_2 \in X$ y $t_1 < t_2 < x$, entonces

$$g(t_1) =$$

Demostración para f'_{izq}, inicio

Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$.

$$Y := X \cap]-\infty, x[= \{t \in X\colon\ \ t < x\}.$$

Definimos $g\colon\ Y \to \mathbb{R}$,

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Si $t_1, t_2 \in X$ y $t_1 < t_2 < x$, entonces

$$g(t_1) = \Delta_f(t_1, x)$$

Demostración para f'_{izq}, inicio

Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$.

$$Y := X \cap]-\infty, x[= \{t \in X : \ t < x\}.$$

Definimos $g\colon\ Y \to \mathbb{R}$,

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Si $t_1, t_2 \in X$ y $t_1 < t_2 < x$, entonces

$$g(t_1) = \Delta_f(t_1, x) \le \Delta_f(t_2, x) =$$

Demostración para f'_{izq}, inicio

Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$.

$$Y := X \cap]-\infty, x[= \{t \in X : \ t < x\}.$$

Definimos $g \colon Y \to \mathbb{R}$,

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Si $t_1, t_2 \in X$ y $t_1 < t_2 < x$, entonces

$$g(t_1) = \Delta_f(t_1, x) \leq \Delta_f(t_2, x) = g(t_2).$$

Demostración para f'_{izq}, inicio

Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$.

$$Y := X \cap]-\infty, x[= \{t \in X : \ t < x\}.$$

Definimos $g\colon\ Y \to \mathbb{R}$,

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Si $t_1, t_2 \in X$ y $t_1 < t_2 < x$, entonces

$$g(t_1) = \Delta_f(t_1, x) \leq \Delta_f(t_2, x) = g(t_2).$$

Hemos demostrado que g es creciente.

Demostración para f'_{izq}, final

$$Y := \{t \in X\colon\ t < x\}, \quad g\colon Y \to \mathbb{R},$$

$$g(t) := \Delta_f(t,x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Demostración para f'_{izq}, final

$$Y := \{t \in X\colon \ t < x\}, \quad g\colon Y \to \mathbb{R},$$

$$g(t) := \Delta_f(t,x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Como g es creciente,

$$f'_{\text{izq}}(x) =$$

Demostración para f'_{izq}, final

$$Y := \{t \in X\colon\ t < x\}, \quad g\colon Y \to \mathbb{R},$$

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Como g es creciente,

$$f'_{\text{izq}}(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t \in Y}} g(t) =$$

Demostración para f'_{izq}, final

$Y := \{t \in X\colon\ \ t < x\}, \quad g\colon Y \to \mathbb{R},$

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Como g es creciente,

$$f'_{\text{izq}}(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t \in Y}} g(t) = \sup_{t \in Y} g(t).$$

Demostración para f'_{izq}, final

$$Y := \{t \in X \colon \; t < x\}, \quad g \colon Y \to \mathbb{R},$$

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Como g es creciente,

$$f'_{\text{izq}}(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t \in Y}} g(t) = \sup_{t \in Y} g(t).$$

Como Y no es vacío, elegimos t_0 en Y y obtenemos

$$f'_{\text{izq}}(x) =$$

Demostración para f'_{izq}, final

$$Y := \{t \in X : \ t < x\}, \quad g \colon Y \to \mathbb{R},$$

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Como g es creciente,

$$f'_{\text{izq}}(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t \in Y}} g(t) = \sup_{t \in Y} g(t).$$

Como Y no es vacío, elegimos t_0 en Y y obtenemos

$$f'_{\text{izq}}(x) = \sup_{t \in Y} g(t)$$

Demostración para f'_{izq}, final

$$Y := \{t \in X : \ t < x\}, \quad g \colon Y \to \mathbb{R},$$

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Como g es creciente,

$$f'_{\mathrm{izq}}(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t \in Y}} g(t) = \sup_{t \in Y} g(t).$$

Como Y no es vacío, elegimos t_0 en Y y obtenemos

$$f'_{\mathrm{izq}}(x) = \sup_{t \in Y} g(t) \geq g(t_0)$$

Demostración para f'_{izq}, final

$$Y := \{t \in X:\ \ t < x\},\quad g\colon Y \to \mathbb{R},$$

$$g(t) := \Delta_f(t,x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Como g es creciente,

$$f'_{\text{izq}}(x) = \lim_{\substack{t\to x\\ t\in Y}} g(t) = \sup_{t\in Y} g(t).$$

Como Y no es vacío, elegimos t_0 en Y y obtenemos

$$f'_{\text{izq}}(x) = \sup_{t\in Y} g(t) \ge g(t_0) = \Delta_f(t_0,x)$$

Demostración para f'_{izq}, final

$$Y := \{t \in X : \ t < x\}, \quad g \colon Y \to \mathbb{R},$$

$$g(t) := \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

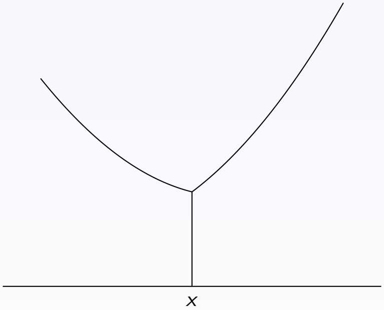
Como g es creciente,

$$f'_{\mathrm{izq}}(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t \in Y}} g(t) = \sup_{t \in Y} g(t).$$

Como Y no es vacío, elegimos t_0 en Y y obtenemos

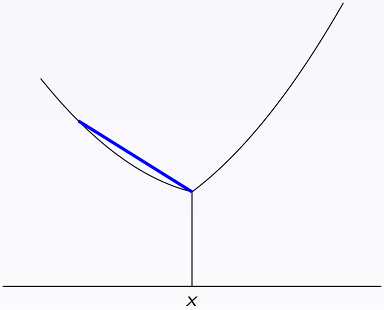
$$f'_{\mathrm{izq}}(x) = \sup_{t \in Y} g(t) \geq g(t_0) = \Delta_f(t_0, x) > -\infty.$$

El sentido geométrico



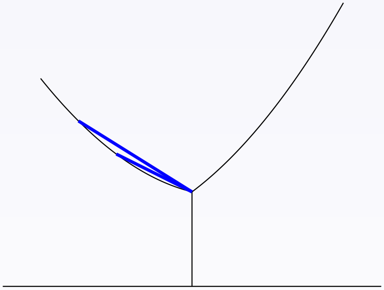
$$f'_{\text{izq}}(x) = \sup_{\substack{t<x \\ t\in X}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

El sentido geométrico



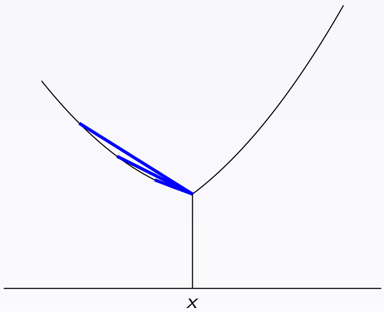
$$f'_{\text{izq}}(x) = \sup_{\substack{t<x \\ t\in X}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

El sentido geométrico



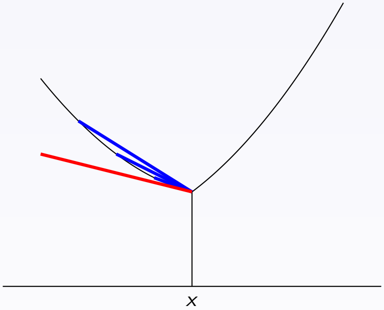
$$f'_{\mathrm{izq}}(x) = \sup_{\substack{t<x\\ t\in X}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

El sentido geométrico



$$f'_{\text{izq}}(x) = \sup_{\substack{t<x\\ t\in X}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

El sentido geométrico



$$f'_{\text{izq}}(x) = \sup_{\substack{t<x \\ t\in X}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Propiedades de las derivadas laterales de una función convexa

Proposición

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función convexa.

Denotemos por a y b los extremos de X: $\quad a := \inf(X)$, $b := \sup(X)$.

- Si $x \in \operatorname{int}(X)$, entonces
$$-\infty < f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x) < +\infty.$$
- f'_{izq} es una función creciente en $X \setminus \{a\}$.
- f'_{der} es una función creciente en $X \setminus \{b\}$.

Demostración de $f'_{\mathrm{izq}}(x) \leq f'_{\mathrm{der}}(x)$

Sea $x \in \mathrm{int}(X)$.

Demostración de $f'_{\text{izq}}(x) \leq f'_{\text{der}}(x)$

Sea $x \in \operatorname{int}(X)$. Si $t, u \in X$, $t < x < u$, entonces

$$\Delta_f(t, x)$$

Demostración de $f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x)$

Sea $x \in \operatorname{int}(X)$. Si $t, u \in X$, $t < x < u$, entonces

$$\Delta_f(t, x) \le \Delta_f(x, u).$$

Demostración de $f'_{\text{izq}}(x) \leq f'_{\text{der}}(x)$

Sea $x \in \operatorname{int}(X)$. Si $t, u \in X$, $t < x < u$, entonces

$$\Delta_f(t, x) \leq \Delta_f(x, u).$$

Pasamos al límite, cuando t tiende a x:

Demostración de $f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x)$

Sea $x \in \operatorname{int}(X)$. Si $t, u \in X$, $t < x < u$, entonces

$$\Delta_f(t, x) \le \Delta_f(x, u).$$

Pasamos al límite, cuando t tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \le \Delta_f(x, u).$$

Demostración de $f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x)$

Sea $x \in \operatorname{int}(X)$. Si $t, u \in X$, $t < x < u$, entonces

$$\Delta_f(t, x) \le \Delta_f(x, u).$$

Pasamos al límite, cuando t tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \le \Delta_f(x, u).$$

Ahora pasamos al límite, cuando u tiende a x:

Demostración de $f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x)$

Sea $x \in \operatorname{int}(X)$. Si $t, u \in X$, $t < x < u$, entonces

$$\Delta_f(t, x) \le \Delta_f(x, u).$$

Pasamos al límite, cuando t tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \le \Delta_f(x, u).$$

Ahora pasamos al límite, cuando u tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x).$$

Demostración de $f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x)$

Sea $x \in \operatorname{int}(X)$. Si $t, u \in X$, $t < x < u$, entonces

$$\Delta_f(t, x) \le \Delta_f(x, u).$$

Pasamos al límite, cuando t tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \le \Delta_f(x, u).$$

Ahora pasamos al límite, cuando u tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x).$$

Gracias a la proposición anterior, podemos concluir que

Demostración de $f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x)$

Sea $x \in \operatorname{int}(X)$. Si $t, u \in X$, $t < x < u$, entonces

$$\Delta_f(t, x) \le \Delta_f(x, u).$$

Pasamos al límite, cuando t tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \le \Delta_f(x, u).$$

Ahora pasamos al límite, cuando u tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x).$$

Gracias a la proposición anterior, podemos concluir que $-\infty < f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x) < +\infty$.

Demostración que f'_{izq} crece

Sean $x_1, x_2 \in X, \quad a < x_1 < x_2.$

Demostración que f'_{izq} crece

Sean $x_1, x_2 \in X, \quad a < x_1 < x_2.$

Entonces

$$f'_{\text{izq}}(x_1)$$

Demostración que f'_{izq} crece

Sean $x_1, x_2 \in X, \quad a < x_1 < x_2$.

Entonces

$$f'_{\text{izq}}(x_1) \leq f'_{\text{der}}(x_1)$$

Demostración que f'_{izq} crece

Sean $x_1, x_2 \in X, \quad a < x_1 < x_2.$

Entonces

$$f'_{\text{izq}}(x_1) \leq f'_{\text{der}}(x_1) = \inf_{\substack{t > x_1 \\ t \in X}} \Delta_f(x_1, t)$$

Demostración que f'_{izq} crece

Sean $x_1, x_2 \in X$, $\quad a < x_1 < x_2$.

Entonces

$$f'_{\text{izq}}(x_1) \leq f'_{\text{der}}(x_1) = \inf_{\substack{t > x_1 \\ t \in X}} \Delta_f(x_1, t) \leq \Delta_f(x_1, x_2)$$

Demostración que f'_{izq} crece

Sean $x_1, x_2 \in X, \quad a < x_1 < x_2$.

Entonces

$$f'_{\text{izq}}(x_1) \le f'_{\text{der}}(x_1) = \inf_{\substack{t > x_1 \\ t \in X}} \Delta_f(x_1, t) \le \Delta_f(x_1, x_2) \le \sup_{\substack{t < x_2 \\ t \in X}} \Delta_f(t, x_2)$$

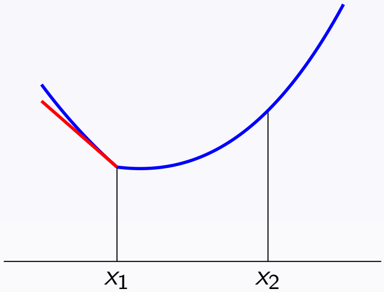
Demostración que f'_{izq} crece

Sean $x_1, x_2 \in X$, $\quad a < x_1 < x_2$.

Entonces

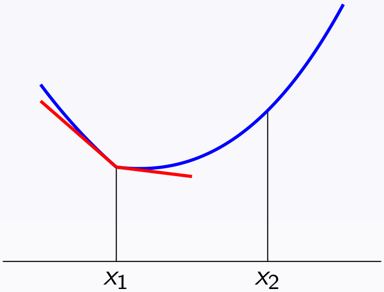
$$f'_{\text{izq}}(x_1) \le f'_{\text{der}}(x_1) = \operatorname*{ínf}_{\substack{t > x_1 \\ t \in X}} \Delta_f(x_1, t) \le \Delta_f(x_1, x_2) \le \sup_{\substack{t < x_2 \\ t \in X}} \Delta_f(t, x_2) = f'_{\text{izq}}(x_2).$$

Demostración que f'_{izq} crece, el sentido geométrico



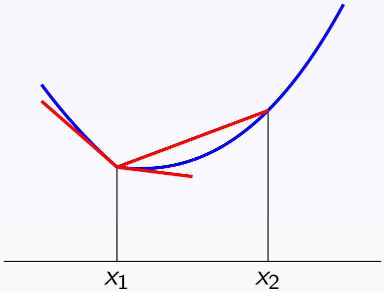
$f'_{\text{izq}}(x_1)$

Demostración que f'_{izq} crece, el sentido geométrico



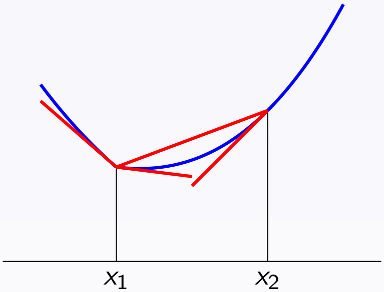
$$f'_{\mathrm{izq}}(x_1) \le f'_{\mathrm{der}}(x_1)$$

Demostración que f'_{izq} crece, el sentido geométrico



$$f'_{\text{izq}}(x_1) \leq f'_{\text{der}}(x_1) \leq \Delta_f(x_1, x_2)$$

Demostración que f'_{izq} crece, el sentido geométrico



$$f'_{\mathrm{izq}}(x_1) \le f'_{\mathrm{der}}(x_1) \le \Delta_f(x_1, x_2) \le f'_{\mathrm{izq}}(x_2).$$

Ejercicio: completar las demostraciones

Demostrar que f'_{der} existe y es creciente.

Ejercicio: la recta básica de la gráfica de una función convexa

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : X \to \mathbb{R}$ una función convexa, $x_0 \in \operatorname{int}(X)$.

Sea

$$\alpha \in [f'_{\text{izq}}(x), f'_{\text{der}}(x)].$$

Demostrar que

$$\forall x \in X \qquad f(x) \geq \alpha(x - x_0) + f(x_0).$$

Explicar el sentido geométrico.

Criterio de convexidad de f en términos de f'

Teorema

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que f es derivable en $\operatorname{int}(X)$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) f' es creciente en $\operatorname{int}(X)$, esto es,

$$\forall t, u \in \operatorname{int}(X) \qquad (t < u) \quad \Longrightarrow \quad (f'(t) \leq f'(u)).$$

Demostración: f es convexa $\Rightarrow$ f' es creciente

Supongamos que f es convexa.

Por la suposición, $f'(x)$ existe para cada x en $\mathrm{int}(X)$.

Demostración: f es convexa $\Rightarrow$ f' es creciente

Supongamos que f es convexa.

Por la suposición, $f'(x)$ existe para cada x en $\operatorname{int}(X)$.

Luego $f'(x) = f'_{\text{izq}}(x)$ para cada x en X.

Demostración: f es convexa $\Rightarrow$ f' es creciente

Supongamos que f es convexa.

Por la suposición, $f'(x)$ existe para cada x en $\operatorname{int}(X)$.

Luego $f'(x) = f'_{\text{izq}}(x)$ para cada x en X.

Ya sabemos que f'_{izq} es creciente.

Demostración: f' es creciente $\Rightarrow$ f es convexa

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Demostración: f' es creciente $\Rightarrow$ f es convexa

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Aplicamos el teorema del valor medio a la función f en

Demostración: f' es creciente $\Rightarrow$ f es convexa

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Aplicamos el teorema del valor medio a la función f en $[x_1, x_2]$ y luego en $[x_2, x_3]$.

Demostración: f' es creciente $\Rightarrow$ f es convexa

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Aplicamos el teorema del valor medio a la función f en $[x_1, x_2]$ y luego en $[x_2, x_3]$.

Obtenemos dos puntos t, u tales que

Demostración: f' es creciente $\Rightarrow$ f es convexa

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Aplicamos el teorema del valor medio a la función f en $[x_1, x_2]$ y luego en $[x_2, x_3]$.

Obtenemos dos puntos t, u tales que

$$x_1 < t < x_2 < u < x_3,$$

Demostración: f' es creciente $\Rightarrow$ f es convexa

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Aplicamos el teorema del valor medio a la función f en $[x_1, x_2]$ y luego en $[x_2, x_3]$.

Obtenemos dos puntos t, u tales que

$$x_1 < t < x_2 < u < x_3,$$

$$\Delta_f(x_1, x_2) =$$

Demostración: f' es creciente $\Rightarrow$ f es convexa

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Aplicamos el teorema del valor medio a la función f en $[x_1, x_2]$ y luego en $[x_2, x_3]$.

Obtenemos dos puntos t, u tales que

$$x_1 < t < x_2 < u < x_3,$$

$$\Delta_f(x_1, x_2) = f'(t), \qquad \Delta_f(x_2, x_3) =$$

Demostración: f' es creciente $\Rightarrow$ f es convexa

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Aplicamos el teorema del valor medio a la función f en $[x_1, x_2]$ y luego en $[x_2, x_3]$.

Obtenemos dos puntos t, u tales que

$$x_1 < t < x_2 < u < x_3,$$

$$\Delta_f(x_1, x_2) = f'(t), \qquad \Delta_f(x_2, x_3) = f'(u).$$

Como $u < v$ y f' crece,

Demostración: f' es creciente $\Rightarrow$ f es convexa

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Aplicamos el teorema del valor medio a la función f en $[x_1, x_2]$ y luego en $[x_2, x_3]$.

Obtenemos dos puntos t, u tales que

$$x_1 < t < x_2 < u < x_3,$$

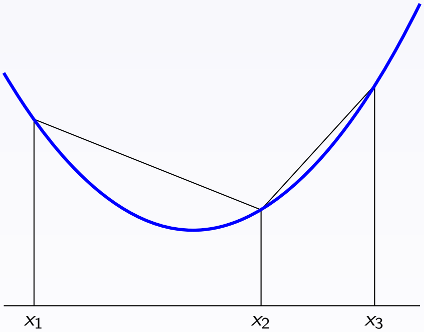
$$\Delta_f(x_1, x_2) = f'(t), \qquad \Delta_f(x_2, x_3) = f'(u).$$

Como $u < v$ y f' crece,

$$\Delta_f(x_1, x_2) = f'(t) \leq f'(u) = \Delta_f(x_2, x_3).$$

Demostración: f es convexa $\Rightarrow$ f' es creciente

El sentido geométrico

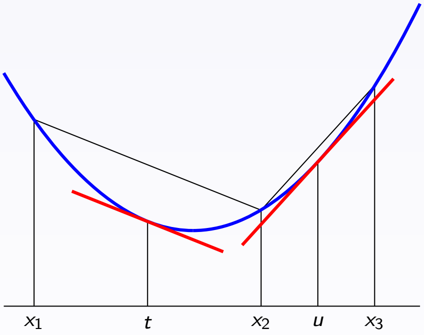


$$x_1 \quad < x_2 < \quad x_3$$

$$\Delta_f(x_1, x_2) \qquad \Delta_f(x_2, x_3)$$

Demostración: f es convexa $\Rightarrow$ f' es creciente

El sentido geométrico



$$x_1 < t < x_2 < u < x_3$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_f(x_1, x_2) & & \Delta_f(x_2, x_3) \\ \| & & \| \\ f'(t) & \leq & f'(u) \end{array}$$

Criterio de convexidad de f en términos de f''

Teorema

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que f'' existe en $\mathrm{int}(X)$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $f''(x) \geq 0$ para cada x en $\mathrm{int}(X)$.

Demostración

1. Por el teorema anterior,

$$f \text{ es convexa} \qquad \Longleftrightarrow$$

Demostración

1. Por el teorema anterior,

$$f \text{ es convexa} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f' \text{ crece en } \operatorname{int}(X).$$

Demostración

1. Por el teorema anterior,

$$f \text{ es convexa} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f' \text{ crece en } \operatorname{int}(X).$$

2. Recordamos: dada una función derivable g en un intervalo abierto Y,

$$g \text{ crece en } Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad g' \geq 0 \text{ en } Y.$$

Demostración

1. Por el teorema anterior,

$$f \text{ es convexa} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f' \text{ crece en } \operatorname{int}(X).$$

2. Recordamos: dada una función derivable g en un intervalo abierto Y,

$$g \text{ crece en } Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad g' \geq 0 \text{ en } Y.$$

3. Aplicamos el criterio del paso 2 a la función $g =$

Demostración

1. Por el teorema anterior,

$$f \text{ es convexa} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f' \text{ crece en } \operatorname{int}(X).$$

2. Recordamos: dada una función derivable g en un intervalo abierto Y,

$$g \text{ crece en } Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad g' \geq 0 \text{ en } Y.$$

3. Aplicamos el criterio del paso 2 a la función $g = f'$ en el intervalo $Y =$

Demostración

1. Por el teorema anterior,

$$f \text{ es convexa} \quad \Longleftrightarrow \quad f' \text{ crece en } \operatorname{int}(X).$$

2. Recordamos: dada una función derivable g en un intervalo abierto Y,

$$g \text{ crece en } Y \quad \Longleftrightarrow \quad g' \geq 0 \text{ en } Y.$$

3. Aplicamos el criterio del paso 2 a la función $g = f'$ en el intervalo $Y = \operatorname{int}(X)$.

Demostración

1. Por el teorema anterior,

$$f \text{ es convexa} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f' \text{ crece en } \operatorname{int}(X).$$

2. Recordamos: dada una función derivable g en un intervalo abierto Y,

$$g \text{ crece en } Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad g' \geq 0 \text{ en } Y.$$

3. Aplicamos el criterio del paso 2 a la función $g = f'$ en el intervalo $Y = \operatorname{int}(X)$.

$$f' \text{ crece en} \operatorname{int}(X) \qquad \Longleftrightarrow$$

Demostración

1. Por el teorema anterior,

$$f \text{ es convexa} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f' \text{ crece en } \operatorname{int}(X).$$

2. Recordamos: dada una función derivable g en un intervalo abierto Y,

$$g \text{ crece en } Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad g' \geq 0 \text{ en } Y.$$

3. Aplicamos el criterio del paso 2 a la función $g = f'$ en el intervalo $Y = \operatorname{int}(X)$.

$$f' \text{ crece en} \operatorname{int}(X) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'' \geq 0 \text{ en } \operatorname{int}(X).$$

La convexidad estricta, f' y f''

Ejercicio. Supongamos que $f \in C(X, \mathbb{R})$ y f' existe en $\operatorname{int}(X)$. Demostrar que si f' es estrictamente creciente en $\operatorname{int}(X)$, entonces f es estrictamente convexa en X.

La convexidad estricta, f' y f''

Ejercicio. Supongamos que $f \in C(X, \mathbb{R})$ y f' existe en $\operatorname{int}(X)$. Demostrar que si f' es estrictamente creciente en $\operatorname{int}(X)$, entonces f es estrictamente convexa en X.

Ejercicio. Supongamos que $f \in C(X, \mathbb{R})$ y f'' existe en $\operatorname{int}(X)$. Demostrar que si $f'' > 0$ en $\operatorname{int}(X)$, entonces f es estrictamente convexa en X.

La convexidad estricta, f' y f''

Ejercicio. Supongamos que $f \in C(X, \mathbb{R})$ y f' existe en $\operatorname{int}(X)$. Demostrar que si f' es estrictamente creciente en $\operatorname{int}(X)$, entonces f es estrictamente convexa en X.

Ejercicio. Supongamos que $f \in C(X, \mathbb{R})$ y f'' existe en $\operatorname{int}(X)$. Demostrar que si $f'' > 0$ en $\operatorname{int}(X)$, entonces f es estrictamente convexa en X.

Ejercicio. Pensar en las afirmaciones inversas.

Convexidad de la función exponencial

Consideramos la función exponencial como función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Convexidad de la función exponencial

Consideramos la función exponencial como función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$\exp_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Sabemos que para cada x en $\mathbb{R}$

$$\exp''_{\mathbb{R}}(x) =$$

Convexidad de la función exponencial

Consideramos la función exponencial como función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$\exp_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Sabemos que para cada x en $\mathbb{R}$

$$\exp_{\mathbb{R}}''(x) = \exp_{\mathbb{R}}(x) >$$

Convexidad de la función exponencial

Consideramos la función exponencial como función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Sabemos que para cada x en $\mathbb{R}$

$$\exp''_{\mathbb{R}}(x) = \exp_{\mathbb{R}}(x) > 0.$$

Convexidad de la función exponencial

Consideramos la función exponencial como función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Sabemos que para cada x en $\mathbb{R}$

$$\exp''_{\mathbb{R}}(x) = \exp_{\mathbb{R}}(x) > 0.$$

Por lo tanto, $\exp_{\mathbb{R}}$ es estrictamente convexa.

Ejercicio: desigualdad de Young

Usando la convexidad de $\exp_{\mathbb{R}}$ demostrar la desiguladad de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

donde

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sugerencias:

- escribir la definición de convexidad para $\exp_{\mathbb{R}}$,
- hacer un cambio de variables.

Ejercicio: convexidad de la función potencial

Sea $p > 1$ y sea $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^p.$$

Demostrar que f es estrictamente convexa.

Ejercicio: concavidad de la función seno en $[0, \pi/2]$

Consideramos $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -\operatorname{sen}(x).$$

Es fácil ver que f es estrictamente convexa.

Demostrar que para cada x con $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{sen}(x) > \frac{2}{\pi}x.$$

Sugerencia: aplicar la definición de la función convexa a la función f y ciertos puntos.