Definición y continuidad de la función Gamma de Euler

Juan Carlos Jiménez Cervantes, Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2020-05-12

Objetivo: Definiremos la función Gamma de Euler y demostraremos su continuidad.

Objetivo: Definiremos la función Gamma de Euler y demostraremos su continuidad.

Idea: Se establece que la función cumple, punto por punto, las hipótesis del teorema sobre continuidad de funciones definidas por una integral.

Objetivo: Definiremos la función Gamma de Euler y demostraremos su continuidad.

Idea: Se establece que la función cumple, punto por punto, las hipótesis del teorema sobre continuidad de funciones definidas por una integral.

Nota: Además del teorema mencionado arriba, se usan considerablemente la regla de Newton–Leibniz y el concepto de integrales impropias.

Teorema (continuidad de una función definida por una integral)

Sean $(T, \mathscr{F}, \mu)$ espacio de medida, X espacio métrico, $x_0 \in X$, $f\colon T \times X \to \mathbb{C}$ función tal que:

- $\forall\, x \in X$ la función f^x es de clase $L^1(T, \mu, \mathbb{C})$,
- para μ-c.t.p. t en T, la función f_t es continua en x_0,
- $\exists\, g \in L^1(T, \mu, [0, +\infty])$ tal que $|f(t, x)| \leq g(t)$, $\forall\, x \in X$ y μ-c.t.p. $t \in T$.

Entonces la función $\Phi\colon X \to \mathbb{C}$, definida por

$$\Phi(x) := \int_T f(t, x)\, \mathrm{d}\mu(t),$$

es continua en el punto x_0.

Proposición (integración por partes para funciones Riemann-integrables)

Sean $F, G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), $f = F'$ y $g = G'$ funciones Riemann-integrables en $[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b fG = FG\Big|_a^b - \int_a^b Fg.$$

Proposición (integración por partes para funciones Riemann-integrables)

Sean $F, G\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), $f = F'$ y $g = G'$ funciones Riemann-integrables en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b fG = FG\Big|_a^b - \int_a^b Fg.$$

Demostración. Observamos que fG y Fg son integrables en $[a, b]$.

También notemos que $(FG)' = fG + Fg$. Por la regla de Barrow–Newton–Leibniz,

$$\int_a^b fG + \int_a^b Fg = \int_a^b (FG)' = (FG)(b) - (FG)(a).$$

∎

Definición (integrales impropias, en el sentido de Riemann)

Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$. Supongamos que para cada b en (a,∞) la función f es Riemann-integrable en $[a,b]$. Definimos:

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f.$$

Definición (función Gamma, Γ)

Definimos la función $\Gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ como

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

Definición (función Gamma, Γ)

Definimos la función $\Gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ como

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

Debemos demostrar que la función está bien definida.

Lema

Sea $\alpha > 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}.$$

Lema

Sea $\alpha > 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}.$$

Demostración.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \lim_{v\to+\infty}\int_0^{v} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \lim_{v\to+\infty}\left.\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right|_v^0 = \left.\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right|_{+\infty}^0 = \frac{1}{\alpha}.$$

∎

Lema

Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $t \geq 1$,

$$t^m \leq m!\, 2^m \, e^{\frac{t}{2}} \, .$$

Lema

Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $t \geq 1$,

$$t^m \leq m!\, 2^m\, e^{\frac{t}{2}} .$$

Demostración.

$$e^{\frac{t}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^k \geq \frac{t^m}{2^m m!}.$$

∎

Proposición

Para cada $b > 0$,

$$\int_1^{+\infty} t^{b-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t < +\infty.$$

Proposición

Para cada $b > 0$,

$$\int_1^{+\infty} t^{b-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t < +\infty.$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq b - 1$. Entonces, por los dos lemas anteriores,

$$\int_1^{+\infty} t^{b-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} t^{m}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \leq 2^m\, m! \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t < +\infty.$$

$\blacksquare$

Proposición

Sea $x > 0$, entonces

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Proposición

Sea $x > 0$, entonces

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Demostración.

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \lim_{u\to 0^+}\left.\frac{t^x}{x}\right|_u^1 = \lim_{u\to 0^+}\frac{1-u^x}{x} = \frac{1}{x}.$$

∎

Proposición (sobre la definición de la función Γ)

Sea $x > 0$. Entonces

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t < +\infty.$$

Proposición (sobre la definición de la función Γ)

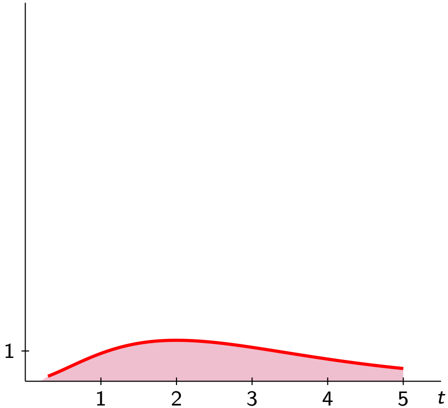
Sea $x > 0$. Entonces

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt < +\infty.$$

Demostración. Se sigue de las 2 proposiciones anteriores:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt &= \int_0^{1} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \\ &\leq \int_0^{1} t^{x-1} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt < +\infty.\end{aligned}$$

■



$$f^{x=3} : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$
$$f^3(t) := \; e^{-t}\, t^{3-1}.$$

Lema (continuidad de f_t)

Definimos $f : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t, x) := \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}.$$

Entoces f_t es continua, para cada t en $(0, +\infty)$.

Lema (continuidad de f_t)

Definimos $f : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t, x) := e^{-t} \, t^{x-1}.$$

Entoces f_t es continua, para cada t en $(0, +\infty)$.

Demostración.

Es inmediato, f_t es el producto de una constante por una función continua. ∎

Teorema (continuidad de la función Γ)

La función Γ es continua en $(0, +\infty)$.

Teorema (continuidad de la función Γ)

La función Γ es continua en $(0, +\infty)$.

Demostración.

Para poder aplicar el teorema general, nos falta demostrar una cota superior de la forma

$$f(t, x) \leq g(t),$$

donde $\int_0^{+\infty} g < +\infty$.

Es fácil ver que es imposible hacerlo de una vez para todos x en $(0, +\infty)$.

Fijamos un intervalo abierto (a, b), donde $0 < a < b < +\infty$, y demostraremos que Γ es continua en (a, b).

Empezamos definiendo dos funciones:

$$\widetilde{f}\colon (0,+\infty)\times(a,b)\to\mathbb{R},$$

$$\widetilde{f}(t,x) := \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1},$$

$$g\colon (0,+\infty)\to[0,+\infty),$$

$$g(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}\ t^{a-1}, & 0 < t \leq 1; \\ \mathrm{e}^{-t}\ t^{b-1}, & t > 1. \end{cases}$$

Caso $t \in (0,1]$. $a < x < b \implies t^{b-1} \leq t^{x-1} \leq t^{a-1}$.

Empezamos definiendo dos funciones:

$$\widetilde{f}\colon (0,+\infty)\times(a,b)\to\mathbb{R},$$

$$\widetilde{f}(t,x) := \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1},$$

$$g\colon (0,+\infty)\to[0,+\infty),$$

$$g(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}\ t^{a-1}, & 0 < t \le 1; \\ \mathrm{e}^{-t}\ t^{b-1}, & t > 1. \end{cases}$$

Caso $t \in (0,1]$. $a < x < b \implies t^{b-1} \le t^{x-1} \le t^{a-1}$.

Caso $t \in (1,+\infty)$. $a < x < b \implies t^{a-1} < t^{x-1} < t^{b-1}$.

Empezamos definiendo dos funciones:

$$\widetilde{f}\colon (0,+\infty)\times(a,b)\to\mathbb{R}, \qquad\qquad g\colon (0,+\infty)\to[0,+\infty),$$

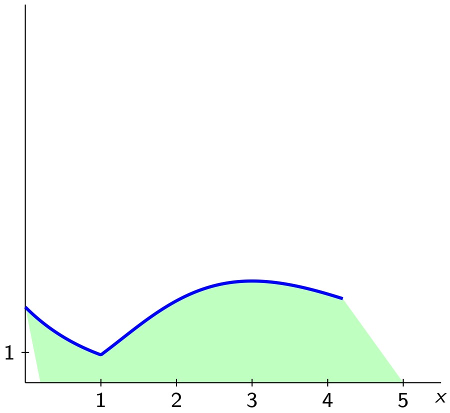
$$\widetilde{f}(t,x) := \ \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}, \qquad\qquad g(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}\ t^{a-1}, & 0<t\le 1; \\ \mathrm{e}^{-t}\ t^{b-1}, & t>1. \end{cases}$$

Caso $t\in(0,1]$. $a<x<b \implies t^{b-1}\le t^{x-1}\le t^{a-1}$.

Caso $t\in(1,+\infty)$. $a<x<b \implies t^{a-1}<t^{x-1}<t^{b-1}$.

Luego, para cada $t\in(0,+\infty)$ y cada $x\in(a,b)$,

$$0\le \widetilde{f}(t,x)\le g(t).$$

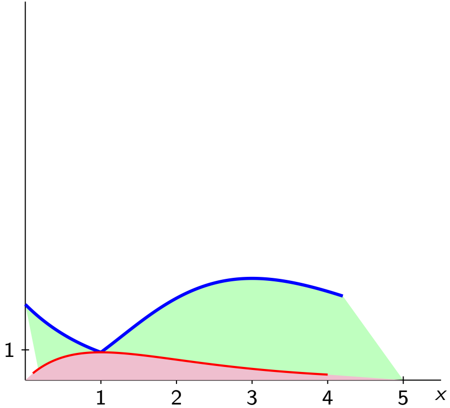


$$g : (0.\infty) \to \mathbb{R},$$

$$g(t) := \begin{cases} e^{-t}\, t^{1-1}, & 0 < t \leq 1; \\ e^{-t}\, t^{4-1}, & t > 1. \end{cases}$$

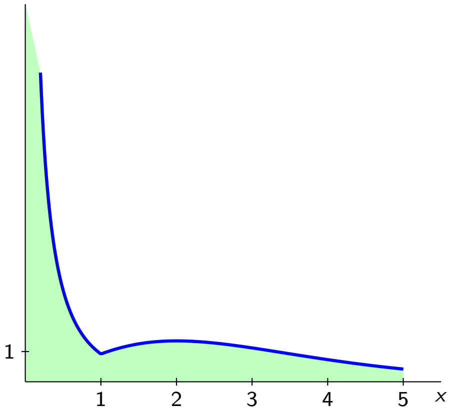
$$a = 1,$$

$$b = 4.$$



$$f^{x=2} : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$
$$f^2(t) := \; e^{-t}\, t^{2-1}.$$

$$g : (0.\infty) \to \mathbb{R},$$
$$g(t) := \begin{cases} e^{-t}\, t^{1-1}, & 0 < t \leq 1; \\ e^{-t}\, t^{4-1}, & t > 1. \end{cases}$$
$$a = 1,$$
$$b = 4.$$

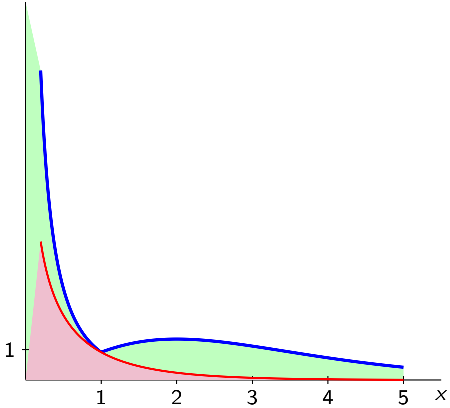


$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R},$$

$$g(t) := \begin{cases} e^{-t}\, t^{0-1}, & 0 < t \leq 1; \\ e^{-t}\, t^{3-1}, & t > 1. \end{cases}$$

$$a = 0,$$

$$b = 3.$$



$$f^{x=\frac{1}{2}} : (0,\infty) \to \mathbb{R},$$
$$f^{\frac{1}{2}}(t) := \ e^{-t}\ t^{\frac{1}{2}-1}.$$

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R},$$
$$g(t) := \begin{cases} e^{-t}\ t^{0-1}, & 0 < t \leq 1; \\ e^{-t}\ t^{3-1}, & t > 1. \end{cases}$$
$$a = 0,$$
$$b = 3.$$

Usando dos de las proposiciones anteriores, probamos que g es integrable:

Usando dos de las proposiciones anteriores, probamos que g es integrable:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 e^{-t}\, t^{a-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-t}\, t^{b-1}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^1 t^{a-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-t}\, t^{b-1}\,\mathrm{d}t < +\infty.\end{aligned}$$

Usando dos de las proposiciones anteriores, probamos que g es integrable:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 e^{-t}\, t^{a-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-t}\, t^{b-1}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^1 t^{a-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-t}\, t^{b-1}\,\mathrm{d}t < +\infty.\end{aligned}$$

Así pues, por el teorema sobre la continuidad de una función definida por una integral, Γ es continua en (a, b). Finalmente, concluimos que Γ es continua en $(0, \infty)$. ∎

Proposición (Relación de recurrencia).

Sea $x > 0$.

Entonces

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

Proposición (Relación de recurrencia).

Sea $x > 0$.

Entonces

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

Demostración. Haremos integración por partes:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^x \mathrm{d}t = t^x\, e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\mathrm{d}t = 0 + \Gamma(x).$$

∎

Valor de la función Γ en 1.

$$\Gamma(1) = 1.$$

Valor de la función Γ en 1.

$$\Gamma(1) = 1.$$

Demostración. Del primer lema, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$. Evaluamos con $\alpha = 1$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1.$$

∎

Corolario (Relación con el factorial).

Sea Γ la función Gamma,

sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)\,!$$

Corolario (Relación con el factorial).

Sea Γ la función Gamma,

sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)\,!$$

Demostración.

Por el resultado anterior, la igualdad se cumple para 1.

Supongamos que se cumple para algún $k \in \mathbb{N}, k > 1$.

$$\Gamma(k+1) = k\,\Gamma(k) = k\,(k-1)! = k!$$

∎