El teorema del cambio de variable, sin demostración (un tema de análisis real)

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2021-11-07

La matriz jacobiana

Sean X, Y subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea $g \in C^1(X, Y)$.
Esta notación significa que $g\colon X \to Y$ es continuamente diferenciable.

Para cada x en X, denotamos por $g'(x)$ la matriz jacobiana de la función g en el punto x:

$$g'(x) := \Big[(D_k g_j)(x)\Big]_{j,k=1}^{n} = \begin{bmatrix} (D_1 g_1)(x) & \dots & (D_n g_1)(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (D_1 g_n)(x) & \dots & (D_n g_n)(x) \end{bmatrix}.$$

Difeomorfismos

Sean X, Y subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea $g\colon X \to Y$.
Se dice que g es un difeomorfismo de clase C^1,
si g es biyectiva, $g \in C^1(X, Y)$ y $g^{-1} \in C^1(X, Y)$.

Si g es un difeomorfismo, entonces $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_X$ y por la regla de la cadena

$$(g^{-1})'(g(x))\, g'(x) = I_n,$$

así que para cada x en X la matriz $g'(x)$ es invertible:

$$\det(g'(x)) \neq 0.$$

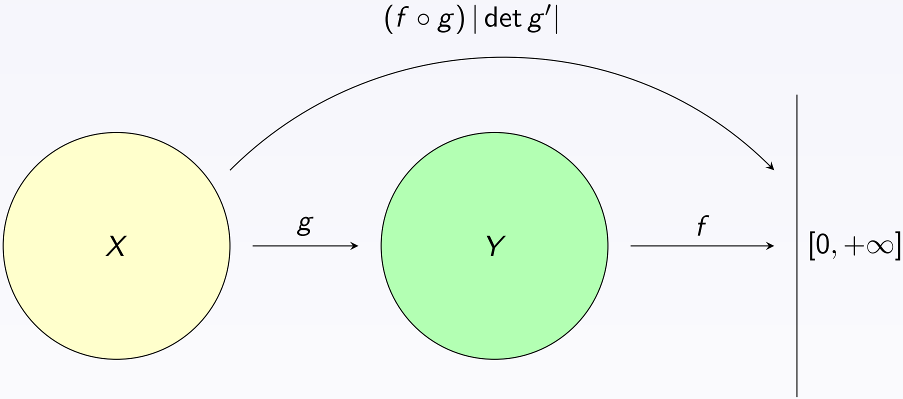
Al revés, si $g \in C^1(X, Y)$, g es biyectiva y $\det g'$ no se anula, entonces g es un difeomorfismo.

Denotamos por $\mathcal{F}$ la sigma-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$
y por μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Teorema (del cambio de variable en las integrales de funciones positivas)

Sean X, Y subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea $g\colon X \to Y$ un difeomorfismo de clase C^1,
es decir, una función biyectiva tal que $g \in C^1(X, Y)$ y $g^{-1} \in C^1(Y, X)$.
Además, sea $f \in \mathcal{M}(Y, \mu, [0, +\infty])$.

Entonces
$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \int_X (f \circ g) \, |\det g'| \, \mathrm{d}\mu.$$



$$\int_Y f = \int_X (f \circ g)\,|\det g'|.$$

Teorema (del cambio de variable en las integrales de funciones complejas)

Sean X, Y subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea $g\colon X \to Y$ un difeomorfismo de clase C^1. Además, sea $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mu, \mathbb{C})$.

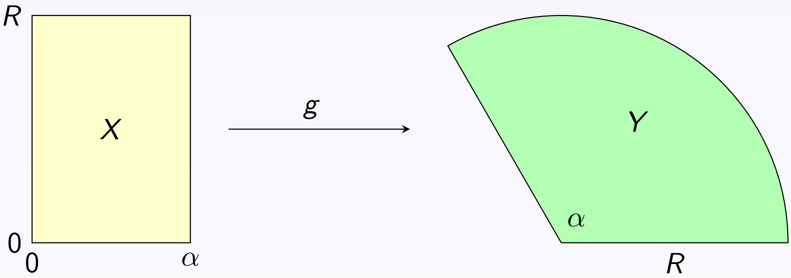
Entonces $(f \circ g)\,|\det g'| \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$ y

$$\int_Y f = \int_X (f \circ g)\,|\det g'|.$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "(f \circ g)\,|\det g'|"] & Y \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

$$\int_Y f = \int_X (f \circ g)\,|\det g'|.$$

Ejemplo: coordenadas polares



$$g(\varphi, r) = \begin{bmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\,\mathrm{sen}(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad g'(\varphi, r) = \begin{bmatrix} -r\,\mathrm{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \\ r\cos(\varphi) & \mathrm{sen}(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad |\det g'(\varphi, r)| = r.$$

$$\int_Y f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^\alpha \int_0^R f(r\cos(\varphi), r\,\mathrm{sen}(\varphi))\, r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi.$$

Problema

Demostrar el teorema del cambio de variable para la integral de Lebesgue,
utilizando su versión para la integral de Riemann
y la aproximación de funciones medibles por funciones continuas de soporte compacto.

Bibliografía

J. Schwartz,
The formula for change in variables in a multiple integral.
The American Mathematical Monthly, Vol. 61 (1954), pp. 81–85,
http://www.jstor.org/stable/2307790.

M. Spivak,
Calculus on Manifolds. A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus.
Addison-Wesley, 1965.