Funciones absolutamente continuas
(un tema de análisis real)

Dante Arroyo Sánchez, Sofía Cano Flores, Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

15 de noviembre de 2024

Objetivos:

- definir el concepto de funciones absolutamente continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$;
- mostrar que las funciones Lipschitz continuas son absolutamente continuas;
- mostrar que las funciones absolutamente continuas son uniformemente continuas;
- mostrar las funciones absolutamente continuas son de variación acotada.

Prerrequisitos:

- continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración;
- propiedades de la variación total;
- funciones de variación acotada.

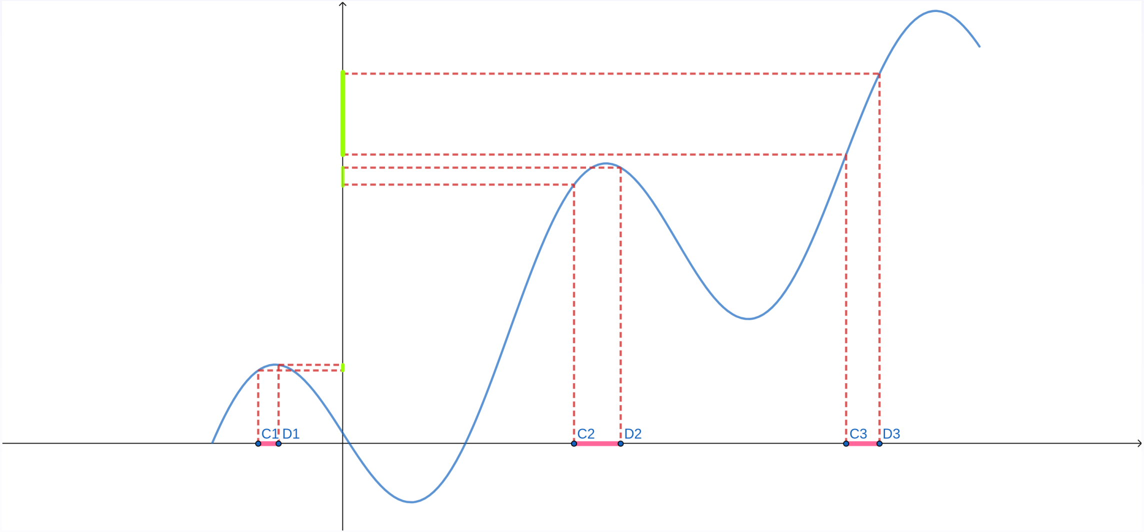
Definición

Una función $F\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ se llama absolutamente continua
si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
para cada familia finita $((c_j, d_j))_{j=1}^{n}$ de subintervalos disjuntos de $[a, b]$
que satisface $\sum_{j=1}^{n} (d_j - c_j) < \delta$, se cumple la desigualdad:

$$\sum_{j=1}^{n} |F(d_j) - F(c_j)| < \varepsilon.$$

Denotemos por $\mathrm{AC}([a, b])$ al conjunto de todas funciones absolutamente continuas en $[a, b]$.

Ejemplo: $0.5x - 2.2\sin(x) + 0.7\cos(0.2x + 5)$



Recordatorio: funciones Lipschitz continuas

Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos, y $f: X \to Y$.

Se dice que la función f es Lipschitz continua si existe $L \geq 0$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b).$$

Proposición (cada función Lipschitz continua es absolutamente continua)

$$\mathrm{Lip}([a,b]) \subseteq \mathrm{AC}([a,b]).$$

Proposición (cada función Lipschitz continua es absolutamente continua)

$$\operatorname{Lip}([a,b]) \subseteq \operatorname{AC}([a,b]).$$

Demostración. Supongamos que $F \in \operatorname{Lip}([a,b])$ y $L > 0$ tal que

$$\forall x, y \in [a,b] \qquad |F(x) - F(y)| \leq L\,|x - y|.$$

Proposición (cada función Lipschitz continua es absolutamente continua)

$$\operatorname{Lip}([a,b]) \subseteq \operatorname{AC}([a,b]).$$

Demostración. Supongamos que $F \in \operatorname{Lip}([a,b])$ y $L > 0$ tal que

$$\forall x, y \in [a,b] \qquad |F(x) - F(y)| \le L\,|x - y|.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \varepsilon/L$.

Si $(c_1, d_1), \ldots, (c_n, d_n)$ son intervalos disjuntos a pares en $[a,b]$ y $\sum_{j=1}^{n} (d_j - c_j) < \delta$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |F(d_j) - F(c_j)| \le \sum_{j=1}^{n} L\,(d_j - c_j) < L\,\delta = \varepsilon. \qquad \square$$

Proposición

$\mathrm{AC}([a, b])$ es un espacio vectorial.

Proposición

$\mathrm{AC}([a,b])$ es un espacio vectorial.

Demostración. Mostremos que $\mathrm{AC}([a,b])$ es un subespacio de $\mathbb{C}^{[a,b]}$.

Proposición

$\mathrm{AC}([a,b])$ es un espacio vectorial.

Demostración. Mostremos que $\mathrm{AC}([a,b])$ es un subespacio de $\mathbb{C}^{[a,b]}$.

$0_{[a,b]} \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Continuación de la demostración

Sean $f, g \in \mathrm{AC}([a, b])$. Veamos que $f + g \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Continuación de la demostración

Sean $f, g \in \mathrm{AC}([a, b])$. Veamos que $f + g \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Continuación de la demostración

Sean $f, g \in \mathrm{AC}([a, b])$. Veamos que $f + g \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Elegimos $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que para cualquier familia finita de subintervalos disjuntos $((c_j, d_j))_{j=1}^{n}$ de $[a, b]$, la cual satisface que $\sum\limits_{j=1}^{n}(d_j - c_j) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se cumple:

Continuación de la demostración

Sean $f, g \in \mathrm{AC}([a, b])$. Veamos que $f + g \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Elegimos $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que para cualquier familia finita de subintervalos disjuntos $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ de $[a, b]$, la cual satisface que $\sum\limits_{j=1}^{n}(d_j - c_j) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se cumple:

$$\sum_{j=1}^{n} |f(d_j) - f(c_j)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^{n} |g(d_j) - g(c_j)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Continuación de la demostración

Para cualquier familia $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ con esta propiedad,

$$\sum_{j=1}^{n} |(f+g)(d_j) - (f+g)(c_j)|$$

Continuación de la demostración

Para cualquier familia $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ con esta propiedad,

$$\sum_{j=1}^n |(f+g)(d_j) - (f+g)(c_j)| = \sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j) + g(d_j) - g(c_j)|$$

Continuación de la demostración

Para cualquier familia $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ con esta propiedad,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |(f+g)(d_j)-(f+g)(c_j)| &= \sum_{j=1}^n |f(d_j)-f(c_j)+g(d_j)-g(c_j)| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(|f(d_j)-f(c_j)|+|g(d_j)-g(c_j)|\right)\end{aligned}$$

Continuación de la demostración

Para cualquier familia $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ con esta propiedad,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |(f+g)(d_j) - (f+g)(c_j)| &= \sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j) + g(d_j) - g(c_j)| \\ &\le \sum_{j=1}^n (|f(d_j) - f(c_j)| + |g(d_j) - g(c_j)|) \\ &\le \sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j)| + \sum_{j=1}^n |g(d_j) - g(c_j)|\end{aligned}$$

Continuación de la demostración

Para cualquier familia $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ con esta propiedad,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |(f+g)(d_j) - (f+g)(c_j)| &= \sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j) + g(d_j) - g(c_j)| \\
&\le \sum_{j=1}^n (|f(d_j) - f(c_j)| + |g(d_j) - g(c_j)|) \\
&\le \sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j)| + \sum_{j=1}^n |g(d_j) - g(c_j)| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Continuación de la demostración

Sean $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que $\lambda f \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Continuación de la demostración

Sean $f \in \mathrm{AC}([a, b])$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que $\lambda f \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Hallamos $\delta > 0$ tal que si $((c_j, d_j))_{j=1}^{n}$ es una familia disjunta contenida en $[a, b]$ y $\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j) < \delta$, entonces

Continuación de la demostración

Sean $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que $\lambda f \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Hallamos $\delta > 0$ tal que si $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia disjunta contenida en $[a,b]$ y $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$, entonces

$$\sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j)| <$$

Continuación de la demostración

Sean $f \in \mathrm{AC}([a, b])$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que $\lambda f \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Hallamos $\delta > 0$ tal que si $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia disjunta contenida en $[a, b]$ y $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |f(d_j) - f(c_j)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

Continuación de la demostración

Sean $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que $\lambda f \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Hallamos $\delta > 0$ tal que si $((c_j,d_j))_{j=1}^n$ es una familia disjunta contenida en $[a,b]$ y $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$, entonces

$$\sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

Luego para cualquier $((c_j,d_j))_{j=1}^n$ con esta propiedad,

$$\sum_{j=1}^n |(\lambda f)(d_j) - (\lambda f)(c_j)| = |\lambda| \sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j)|$$

Continuación de la demostración

Sean $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que $\lambda f \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Hallamos $\delta > 0$ tal que si $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia disjunta contenida en $[a,b]$ y $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |f(d_j) - f(c_j)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

Luego para cualquier $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ con esta propiedad,

$$\sum_{j=1}^{n} |(\lambda f)(d_j) - (\lambda f)(c_j)| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |f(d_j) - f(c_j)| \leq \frac{|\lambda|\,\varepsilon}{|\lambda| + 1}$$

Continuación de la demostración

Sean $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que $\lambda f \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Hallamos $\delta > 0$ tal que si $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia disjunta contenida en $[a,b]$ y $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |f(d_j) - f(c_j)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

Luego para cualquier $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ con esta propiedad,

$$\sum_{j=1}^{n} |(\lambda f)(d_j) - (\lambda f)(c_j)| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |f(d_j) - f(c_j)| \leq \frac{|\lambda|\, \varepsilon}{|\lambda| + 1} < \varepsilon.$$

Ejercicio.

Sea $f \in \mathrm{AC}([a, b])$. Demostrar que f es uniformemente continua.

Sugerencia: aplicar la definición de función absolutamente continua con $n = 1$.

Ejercicio.

Sea $f \in \mathrm{AC}([a, b])$. Demostrar que f es uniformemente continua.

Sugerencia: aplicar la definición de función absolutamente continua con $n = 1$.

Ejercicio. Dar un ejemplo de función que no sea absolutamente continua.

Recordatorio (la variación de una función)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición $\tau \in \mathcal{P}[a,b]$, sea:

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) := \sum_{k=1}^{n} |f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})|.$$

La variación total de f en $[a,b]$ se define como:

$$\mathrm{Var}_a^b(f) := \sup_{\tau \in \mathcal{P}[a,b]} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau).$$

Cada función absolutamente continua tiene variación acotada

Teorema

$$\mathrm{AC}([a, b]) \subseteq \mathrm{BV}([a, b]).$$

Inicio de la demostración

Sea $F \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Para $\varepsilon = 1$, encontremos $\delta > 0$ como en la definición.

Pongamos

$$K := 1 + \left\lfloor \frac{b - a}{\delta} \right\rfloor.$$

El número K tiene la siguiente propiedad:

$$0 < \frac{b - a}{K} < \delta.$$

Continuación de la demostración

Sea τ una partición de $[a, b]$.

Denotemos por τ' a la partición que se obtiene de τ al agregar (cuando no pertenecen a τ) los puntos

$$a + j\,\frac{b-a}{K} \qquad (j = 1, \ldots, K-1).$$

Numeramos los elementos de τ' con subíndices dobles de tal manera que

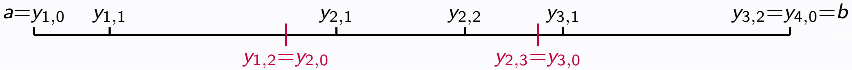
$$y_{j,0} = a + \frac{(j-1)(b-a)}{K} < y_{j,1} < \ldots < y_{j,m_j} = a + \frac{j(b-a)}{K} = y_{j+1,0}.$$

Ejemplo con $K = 3$

Partición original τ:

Malla uniforme en $[a, b]$:

Partición nueva τ':



Continuación de la demostración.

$$y_{j,0} = a + \frac{(j-1)(b-a)}{K} < y_{j,1} < \ldots < y_{j,m_j} = a + \frac{j(b-a)}{K} = y_{j+1,0}.$$

En cada grupo, la suma de las longitudes de los intervalos es $\frac{b-a}{K} < \delta$,
y por la elección de δ obtenemos:

$$\sum_{s=1}^{m_j} |F(y_{j,s}) - F(y_{j,s-1})| < 1.$$

Luego

$$S_{\text{abs}}(F,\tau) \leq S_{\text{abs}}(F,\tau') = \sum_{j=1}^{K} \left(\sum_{s=1}^{m_j} |F(y_{j,s}) - F(y_{j,s-1})| \right) < K.$$

Pasando al supremo sobre τ obtenemos que $\mathrm{Var}_a^b(F) \leq K$.

Recordatorio sobre funciones de variación acotada

Proposición

Sea $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. Entonces, f es derivable c.t.p., y f' es integrable.

Demostración

Como $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, podemos escribir f como una combinación lineal de funciones crecientes:

$$f =$$

Demostración

Como $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, podemos escribir f como una combinación lineal de funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}\,(g_3 - g_4).$$

Demostración

Como $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, podemos escribir f como una combinación lineal de funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}\,(g_3 - g_4).$$

Sabemos que las derivadas de g_1, g_2, g_3, g_4 existen μ-c.t.p.

Demostración

Como $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, podemos escribir f como una combinación lineal de funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}\,(g_3 - g_4).$$

Sabemos que las derivadas de g_1, g_2, g_3, g_4 existen μ-c.t.p.

Por lo tanto, f es derivable μ-c.t.p., y

$$f' =$$

Demostración

Como $f \in \mathrm{BV}([a, b])$, podemos escribir f como una combinación lineal de funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}\,(g_3 - g_4).$$

Sabemos que las derivadas de g_1, g_2, g_3, g_4 existen μ-c.t.p.

Por lo tanto, f es derivable μ-c.t.p., y

$$f' = g_1' - g_2' + \mathrm{i}\,(g_3' - g_4'),$$

Demostración

Como $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, podemos escribir f como una combinación lineal de funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}\,(g_3 - g_4).$$

Sabemos que las derivadas de g_1, g_2, g_3, g_4 existen μ-c.t.p.

Por lo tanto, f es derivable μ-c.t.p., y

$$f' = g_1' - g_2' + \mathrm{i}\,(g_3' - g_4'), \qquad |f'| \leq$$

Demostración

Como $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, podemos escribir f como una combinación lineal de funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}\,(g_3 - g_4).$$

Sabemos que las derivadas de g_1, g_2, g_3, g_4 existen μ-c.t.p.

Por lo tanto, f es derivable μ-c.t.p., y

$$f' = g_1' - g_2' + \mathrm{i}\,(g_3' - g_4'), \qquad |f'| \leq g_1' + g_2' + g_3' + g_4'.$$

Demostración

Como $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, podemos escribir f como una combinación lineal de funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}\,(g_3 - g_4).$$

Sabemos que las derivadas de g_1, g_2, g_3, g_4 existen μ-c.t.p.

Por lo tanto, f es derivable μ-c.t.p., y

$$f' = g_1' - g_2' + \mathrm{i}\,(g_3' - g_4'), \qquad |f'| \le g_1' + g_2' + g_3' + g_4'.$$

$$\int_{[a,b]} |f'|\,\mathrm{d}\mu \le$$

Demostración

Como $f \in \mathrm{BV}([a, b])$, podemos escribir f como una combinación lineal de funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}\,(g_3 - g_4).$$

Sabemos que las derivadas de g_1, g_2, g_3, g_4 existen μ-c.t.p.

Por lo tanto, f es derivable μ-c.t.p., y

$$f' = g_1' - g_2' + \mathrm{i}\,(g_3' - g_4'), \qquad |f'| \leq g_1' + g_2' + g_3' + g_4'.$$

$$\int_{[a,b]} |f'| \,\mathrm{d}\mu \leq \sum_{k=1}^{4} (g_k(b) - g_k(a)) < +\infty.$$

Corolarios

Corolario

Sea $F \in \mathrm{AC}([a, b])$. Entonces, F es derivable c.t.p., y F' es integrable.

Corolarios

Corolario

Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Entonces, F es derivable c.t.p., y F' es integrable.

Corolario

Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Entonces, F es acotada en $[a,b]$.

Corolarios

Corolario

Sea $F \in \mathrm{AC}([a, b])$. Entonces, F es derivable c.t.p., y F' es integrable.

Corolario

Sea $F \in \mathrm{AC}([a, b])$. Entonces, F es acotada en $[a, b]$.

Explicar estos corolarios.

El producto de funciones absolutamente continuas

Proposición

Sean $F, G \in \mathrm{AC}([a, b])$. Entonces, $FG \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Demostración, inicio

Como $F, G \in \mathrm{AC}([a, b])$, existen $M, N > 0$ tales que

$$\forall x \in [a, b] \qquad |F(x)| \leq M \quad \wedge \quad |G(x)| \leq N.$$

Demostración, inicio

Como $F, G \in \mathrm{AC}([a,b])$, existen $M, N > 0$ tales que

$$\forall x \in [a,b] \qquad |F(x)| \le M \quad \wedge \quad |G(x)| \le N.$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración, inicio

Como $F, G \in \mathrm{AC}([a, b])$, existen $M, N > 0$ tales que

$$\forall x \in [a, b] \qquad |F(x)| \leq M \quad \wedge \quad |G(x)| \leq N.$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Aplicamos la definición de $\mathrm{AC}([a, b])$ con f y $\dfrac{\varepsilon}{2N}$, obtenemos δ_1.

Demostración, inicio

Como $F, G \in \mathrm{AC}([a,b])$, existen $M, N > 0$ tales que

$$\forall x \in [a,b] \qquad |F(x)| \le M \quad \wedge \quad |G(x)| \le N.$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Aplicamos la definición de $\mathrm{AC}([a,b])$ con f y $\dfrac{\varepsilon}{2N}$, obtenemos δ_1.

Aplicamos la definición de $\mathrm{AC}([a,b])$ con g y $\dfrac{\varepsilon}{2M}$, obtenemos δ_2.

Demostración, inicio

Como $F, G \in \mathrm{AC}([a,b])$, existen $M, N > 0$ tales que

$$\forall x \in [a,b] \qquad |F(x)| \leq M \quad \wedge \quad |G(x)| \leq N.$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Aplicamos la definición de $\mathrm{AC}([a,b])$ con f y $\dfrac{\varepsilon}{2N}$, obtenemos δ_1.

Aplicamos la definición de $\mathrm{AC}([a,b])$ con g y $\dfrac{\varepsilon}{2M}$, obtenemos δ_2.

Sea $\delta_3 := \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^{n}$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j) < \delta$.

$$\sum_{j=1}^{n} |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)|$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^{n}$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j) < \delta$.

$$\sum_{j=1}^{n} |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| =$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^{n}$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j) < \delta$.

$$\sum_{j=1}^{n} |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| = \sum_{j=1}^{n} |F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)|$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

$$\sum_{j=1}^{n} |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| = \sum_{j=1}^{n} |F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)|$$

$$\leq$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| &= \sum_{j=1}^n |F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^n (|F(d_j)G(d_j) - F(d_j)G(c_j)| + |F(d_j)G(c_j) - F(c_j)G(c_j)|)
\end{aligned}$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| &= \sum_{j=1}^n |F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^n (|F(d_j)G(d_j) - F(d_j)G(c_j)| + |F(d_j)G(c_j) - F(c_j)G(c_j)|) \\
&=
\end{aligned}$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| &= \sum_{j=1}^n |F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^n (|F(d_j)G(d_j) - F(d_j)G(c_j)| + |F(d_j)G(c_j) - F(c_j)G(c_j)|) \\
&= \sum_{j=1}^n |F(d_j)||G(d_j) - G(c_j)| + \sum_{j=1}^n |G(c_j)||F(d_j) - F(c_j)|
\end{aligned}$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j) < \delta$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}|(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| &= \sum_{j=1}^{n}|F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}(|F(d_j)G(d_j) - F(d_j)G(c_j)| + |F(d_j)G(c_j) - F(c_j)G(c_j)|) \\
&= \sum_{j=1}^{n}|F(d_j)||G(d_j) - G(c_j)| + \sum_{j=1}^{n}|G(c_j)||F(d_j) - F(c_j)| \\
&\leq
\end{aligned}$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| &= \sum_{j=1}^n |F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^n (|F(d_j)G(d_j) - F(d_j)G(c_j)| + |F(d_j)G(c_j) - F(c_j)G(c_j)|) \\
&= \sum_{j=1}^n |F(d_j)||G(d_j) - G(c_j)| + \sum_{j=1}^n |G(c_j)||F(d_j) - F(c_j)| \\
&\leq M \sum_{j=1}^n |G(d_j) - G(c_j)| + N \sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)|
\end{aligned}$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| &= \sum_{j=1}^n |F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^n (|F(d_j)G(d_j) - F(d_j)G(c_j)| + |F(d_j)G(c_j) - F(c_j)G(c_j)|) \\
&= \sum_{j=1}^n |F(d_j)||G(d_j) - G(c_j)| + \sum_{j=1}^n |G(c_j)||F(d_j) - F(c_j)| \\
&\leq M \sum_{j=1}^n |G(d_j) - G(c_j)| + N \sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| \\
&<
\end{aligned}$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| &= \sum_{j=1}^n |F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^n (|F(d_j)G(d_j) - F(d_j)G(c_j)| + |F(d_j)G(c_j) - F(c_j)G(c_j)|) \\
&= \sum_{j=1}^n |F(d_j)||G(d_j) - G(c_j)| + \sum_{j=1}^n |G(c_j)||F(d_j) - F(c_j)| \\
&\leq M \sum_{j=1}^n |G(d_j) - G(c_j)| + N \sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + N\frac{\varepsilon}{2N}
\end{aligned}$$

Demostración, final

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ una colección disjunta de subintervalos de $[a, b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |(FG)(d_j) - (FG)(c_j)| &= \sum_{j=1}^n |F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^n (|F(d_j)G(d_j) - F(d_j)G(c_j)| + |F(d_j)G(c_j) - F(c_j)G(c_j)|) \\
&= \sum_{j=1}^n |F(d_j)||G(d_j) - G(c_j)| + \sum_{j=1}^n |G(c_j)||F(d_j) - F(c_j)| \\
&\leq M \sum_{j=1}^n |G(d_j) - G(c_j)| + N \sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| \\
&< M \frac{\varepsilon}{2M} + N \frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$