Convergencia absoluta de integrales impropias (un tema del curso "Análisis real")

Antonio Jimarez Escamilla y
Abdiel Rolando Márquez Meza
con sugerencias de Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

20 de mayo de 2020

Tabla de contenidos

Objetivos

- Definir el concepto de integral impropia.
- Definir el concepto de convergencia absoluta de una integral impropia.
- Establecer el criterio de Cauchy para convergencia de integrales impropias de funciones complejas.
- Estudiar criterios para la convergencia de integrales impropias para funciones positivas.

Tabla de contenidos

Criterio de Heine

Teorema

Sean:

- $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos,
- $f : X \to Y$ una función,
- $a \in X$, $b \in Y$.

Suponga además que existe una base local numerable de la topoogía τ_X en el punto a. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$,

b) Para cualquier sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $X \setminus \{a\}$.

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = b.$$

Límite de una función creciente en los extremos de un intervalo

Proposición

Sean

- $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$,
- $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función creciente,
- $V = \phi[(a, b)]$.

  Entonces

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} \phi(x) = \sup(V) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} \phi(x) = \inf(V).$$

El límite de una función creciente en términos del límite de una sucesión

Proposición

Sean

- $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$,
- $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función creciente,
- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en (a, b) tal que $\lim_{n \to +\infty} x_n = b$.

  Entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \phi(x_n) = \lim_{t \to b^-} \phi(t).$$

Teorema de convergencia monótona

Teorema

Sean

- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ una sucesión creciente,
- $g(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Entonces

- $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X g \; d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \; d\mu$.

Teorema de convergencia dominada

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ una sucesión tal que

i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función g,

ii) Existe una función $h \in L^1(X, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que $|(f_n)(x)| \leq h(x)$ para todo $x \in X$.

Entonces

- $(f_n) \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ para cada $n \in \mathbb{N}$,
- $g \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X |f_n - g| d\mu = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n \; d\mu = \int_X g \; d\mu$.

Criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función

Proposición

Sean:

- (X, τ) un espacio topologico,
- $M \subset X$,
- $a \in X$ un punto de acumulación de M,
- $\phi : M \to \mathbb{C}$ una función.

Suponga además que existe una base local numerable de τ en a.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = b$

b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists V \in \tau(a)$ tal que $\forall x, y \in V \;\; d(\phi(x), \phi(y)) < \varepsilon$

Tabla de contenidos

Definiciones

Definición

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$.
Suponga que $\forall v \in (a,b) \quad f \in L^1((a,v),\mathcal{F},\mathbb{C})$.
Entonces definimos

$$\int_a^{\to b} f := \lim_{\substack{v \to b \\ v \in (a,b)}} \int_a^v f \quad \text{y} \quad \int_{\to a}^{b} f := \lim_{\substack{v \to a \\ v \in (a,b)}} \int_v^b f.$$

Si estos existen y son finitos se dice que **las integrales impropias** $\int_a^{\to b} f$ y $\int_{\to a}^{b} f$ **convergen**.

Integrales impropias

Lema

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$.

- Suponga que $\forall u, v \in (a,b) \quad f \in L^1([u,v],\mathcal{F},\mathbb{C})$,
- Sean $c_1, c_2 \in (a,b)$.

Entonces:

I) $\displaystyle\int_{\to a}^{c_1} f$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{\to a}^{c_2} f$ converge.

II) $\displaystyle\int_{c_1}^{\to b} f$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{c_2}^{\to b} f$converge.

Integrales impropias

Lema

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$.

- Suponga que $\forall u,v \in (a,b) \quad f \in L^1([u,v],\mathcal{F},\mathbb{C})$,
- Sean $c_1, c_2 \in (a,b)$.

Entonces:

I) $\displaystyle\int_{\to a}^{c_1} f$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{\to a}^{c_2} f$ converge.

II) $\displaystyle\int_{c_1}^{\to b} f$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{c_2}^{\to b} f$ converge.

Basta notar que

$$\int_u^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f = \int_u^{c_2} f \qquad .$$

Integrales impropias

Lema

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$.

- Suponga que $\forall u, v \in (a,b) \quad f \in L^1([u,v],\mathcal{F},\mathbb{C})$,
- Sean $c_1, c_2 \in (a,b)$.

Entonces:

I) $\displaystyle\int_{\to a}^{c_1} f$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{\to a}^{c_2} f$ converge.

II) $\displaystyle\int_{c_1}^{\to b} f$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{c_2}^{\to b} f$converge.

Basta notar que

$$\int_u^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f = \int_u^{c_2} f \implies \int_{\to a}^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f = \int_{\to a}^{c_2} f.$$

Integrales impropias

Definición

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$.

- Suponga que $\forall u, v \in (a,b) \quad f \in L^1([u,v],\mathcal{F},\mathbb{C})$,
- $\exists c \in (a,b)$ tal que $\displaystyle\int_c^{\to b} f$ y $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f$ convergen.

Entonces definimos

$$\int\limits_{\to a}^{\to b} f := \int\limits_{\to a}^{c} f + \int\limits_{c}^{\to b} f.$$

Integrales impropias

Definición

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, \mathbb{C})$, donde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$.

- Suponga que $\forall u, v \in (a,b) \quad f \in L^1([u,v], \mathcal{F}, \mathbb{C})$,
- $\exists c \in (a,b)$ tal que $\int_c^{\to b} f$ y $\int_{\to a}^{c} f$ convergen.

Entonces definimos

$$\int\limits_{\to a}^{\to b} f := \int\limits_{\to a}^{c} f + \int\limits_{c}^{\to b} f.$$

Por el lema anterior la definición de $\int_{\to a}^{\to b} f$ no depende de la elección del punto $c \in (a,b)$.

Tabla de contenidos

Caso particular del criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función

Proposición

Sea $\phi : (a, b) \subset \overline{\mathbb{R}} \longmapsto \mathbb{C}$, con $a < b$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow b} \phi(x) = M$,

b) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists v \in (a, b) \quad \forall x, y \in (v, b) \quad |\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon.$

Criterio de Cauchy para la convergencia de integrales impropias

Proposición

- Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$.
- Suponga que $\forall v \in (a,b) \quad f \in L^1((a,v),\mathcal{F},\mathbb{C})$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ converge,

b) $\displaystyle\lim_{\substack{x_1,x_2 \to b \\ x_1,x_2 \in (a,b)}} \int_{x_1}^{x_2} f = 0.$

Criterio de Cauchy para la convergencia de integrales impropias

Proposición

- Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$.
- Suponga que $\forall v \in (a,b) \quad f \in L^1((a,v),\mathcal{F},\mathbb{C})$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ converge,

b) $\displaystyle\lim_{\substack{x_1,x_2\to b\\ x_1,x_2\in(a,b)}} \int_{x_1}^{x_2} f = 0.$

Criterio de Cauchy para la convergencia de integrales impropias

Proposición

- Sea $f \in \mathcal{M}((a, b), \mathcal{F}, \mathbb{C})$, donde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$.
- Suponga que $\forall v \in (a, b) \quad f \in L^1((a, v), \mathcal{F}, \mathbb{C})$.
- Definimos $\phi : (a, b) \longmapsto \mathbb{C}$ como $\phi(x) := \displaystyle\int_a^x f$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\lim\limits_{x \to b} \phi(x)$ existe y es finito,

b) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists v \in (a, b) \quad \forall x_1, x_2 \in (v, b) \quad |\phi(x_2) - \phi(x_1)| < \epsilon$.

Demostración

Basta aplicar el **Criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función** a ϕ.

Ejercicio

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ una función.
Suponga que $\forall v \in (a, b) \quad f \in L^1((a, v), \mu, \mathbb{C})$.
Demuestre que:
$\int_a^{\to b} |f|$ converge $\implies \int_a^{\to b} f$ converge.

Sugerencia: Aplicar el criterio de Cauchy para la convergencia a ambas integrales impropias y la siguiente propiedad

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f|.$$

Convergencia absoluta de una integral impropia

Definición

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$.

- Suponga que $\forall v \in (a,b) \quad f \in L^1((a,v),\mathcal{F},\mathbb{C})$,
- $\displaystyle\int_a^{\to b} |f|$ converge.

Entonces se dice que $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ **es absolutamente convergente**.

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},[0,+\infty))$.
Suponga que $\forall v \in (a,b) \quad f \in L^1((a,v),\mathcal{F},[0,+\infty))$.
Entonces

$$\int_a^{\to b} f = \int_a^b f.$$

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Demostración

Consideremos la función $\phi(x) = \int_a^x f$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ creciente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$. Entonces:

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Demostración

Consideremos la función $\phi(x) = \int_a^x f$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ creciente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$. Entonces:

- ϕ es creciente,

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Demostración

Consideremos la función $\phi(x) = \int_a^x f$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ creciente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$. Entonces:

- ϕ es creciente,
- $f\,\mathbb{1}_{(a,x_n)} \nearrow f$.

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Demostración

Consideremos la función $\phi(x) = \int_a^x f$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ creciente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$. Entonces:

- ϕ es creciente,
- $f\,\mathbb{1}_{(a,x_n)} \nearrow f$.

Luego se cumple que

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Demostración

Consideremos la función $\phi(x) = \int\limits_a^x f$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ creciente tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$. Entonces:

- ϕ es creciente,
- $f\,\mathbb{1}_{(a,x_n)} \nearrow f$.

Luego se cumple que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{x_n} f$$

Teorema de la convergencia monótona

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Demostración

Consideremos la función $\phi(x) = \int_a^x f$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ creciente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$. Entonces:

- ϕ es creciente,
- $f\,\mathbb{1}_{(a,x_n)} \nearrow f$.

Luego se cumple que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{x_n} f = \lim_{x_n\to b} \phi(x_n)$$

Definición de ϕ

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Demostración

Consideremos la función $\phi(x) = \int\limits_a^x f$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ creciente tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$. Entonces:

- ϕ es creciente,
- $f\,\mathbb{1}_{(a,x_n)} \nearrow f$.

Luego se cumple que

$$\lim_{x_n\to b} \phi(x_n) = \lim_{v\to b} \phi(v)$$

Límite de funciones crecientes en términos de sucesiones

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Demostración

Consideremos la función $\phi(x) = \int\limits_a^x f$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ creciente tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$. Entonces:

- ϕ es creciente,
- $f\,\mathbb{1}_{(a,x_n)} \nearrow f$.

Luego se cumple que

$$\lim_{v\to b} \phi(v) = \lim_{v\to b} \int_a^v f$$

Definición de ϕ

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Demostración

Consideremos la función $\phi(x) = \int\limits_a^x f$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ creciente tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$. Entonces:

- ϕ es creciente,
- $f\,\mathbb{1}_{(a,x_n)} \nearrow f$.

Luego se cumple que

$$\lim_{v\to b}\int_a^v f = \int_a^{\to b} f.$$

Definición de integral impropia

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Demostración

Consideremos la función $\phi(x) = \int_a^x f$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ creciente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$. Entonces:

- ϕ es creciente,
- $f\,\mathbb{1}_{(a,x_n)} \nearrow f$.

Luego se cumple que

$$\int_a^b f = \int_a^{\to b} f.$$

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones positivas

Corolario

Sea $f \in \mathcal{M}((a, b), \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
Entonces
$$\int_a^{\to b} f \quad \text{converge} \Leftrightarrow f \in L^1((a, b), \mathcal{F}, [0, +\infty)).$$

Convergencia absoluta e integral de Lebesgue para funciones complejas

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$.
Suponga que: $\forall v \in (a,b) \quad f \in L^1((a,v),\mathcal{F},\mathbb{C})$.
Entonces

$$\int_a^{\to b} f = \int_a^b f.$$

Sugerencia

Aplicar teorema de convergencia dominada y el criterio de Heine.

Tabla de contenidos

Proposición

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p > 1.$$

Proposición

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p > 1.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $p \leq 1$.

Proposición

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p > 1.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $p \leq 1$.

- $p = 1$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{v \to +\infty} \int_1^{v} \frac{dx}{x} = \lim_{v \to +\infty} \ln(v) = +\infty.$

Proposición

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p > 1.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $p \leq 1$.

- $p = 1$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{v \to +\infty} \int_1^{v} \frac{dx}{x} = \lim_{v \to +\infty} \ln(v) = +\infty.$
- $p < 1$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{v \to +\infty} \int_1^{v} \frac{dx}{x^p} = \lim_{v \to +\infty} \frac{v^{1-p} - 1}{1-p} = \lim_{v \to +\infty} \frac{v^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = +\infty.$

Proposición

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p > 1.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $p \leq 1$.

- $p = 1$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{v\to+\infty} \int_1^v \frac{dx}{x} = \lim_{v\to+\infty} \ln(v) = +\infty.$
- $p < 1$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{v\to+\infty} \int_1^v \frac{dx}{x^p} = \lim_{v\to+\infty} \frac{v^{1-p} - 1}{1-p} = \lim_{v\to+\infty} \frac{v^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = +\infty.$

$\Longleftarrow$) Suponga que $p > 1$.

Proposición

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p > 1.$$

Demostración.

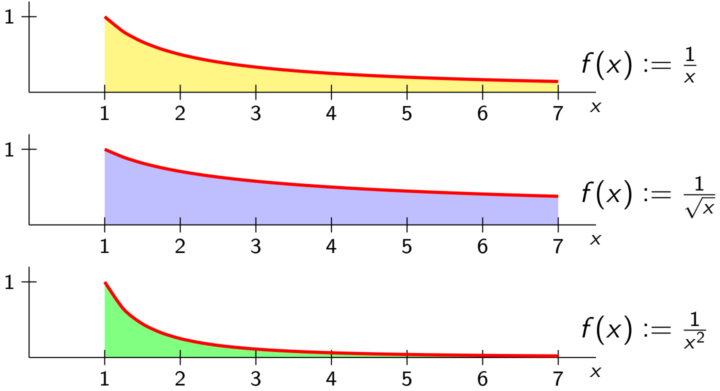
$\Longrightarrow$) Supongamos que $p \leq 1$.

- $p = 1$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{v \to +\infty} \int_1^v \frac{dx}{x} = \lim_{v \to +\infty} \ln(v) = +\infty.$
- $p < 1$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{v \to +\infty} \int_1^v \frac{dx}{x^p} = \lim_{v \to +\infty} \frac{v^{1-p} - 1}{1-p} = \lim_{v \to +\infty} \frac{v^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = +\infty.$

$\Longleftarrow$) Suponga que $p > 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{v \to \infty} \frac{v^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = -\frac{1}{1-p} < +\infty.$$

$\square$


1
1 2 3 4 5 6 7 x
$f(x) := \frac{1}{x}$
1
1 2 3 4 5 6 7 x
$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$
1
1 2 3 4 5 6 7 x
$f(x) := \frac{1}{x^2}$

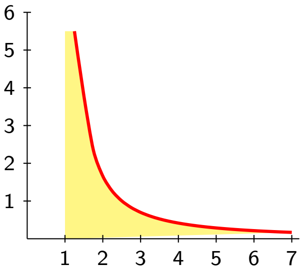
Ejercicio

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p < 1.$$

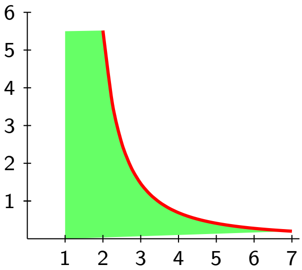
Ejercicio

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(x)^q} < \infty \iff q > 1.$$

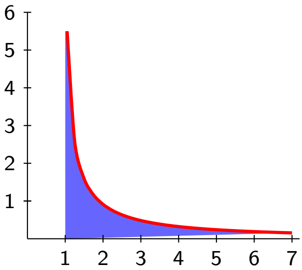
Sugerencia: Tomar $u = \ln(x)$.



$$f(x) = \frac{1}{x \ \ln(x)}$$



$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$$



$$f(x) = \frac{1}{x \ \ln(x)^2}$$

Ejercicio

Sea $a > 0$. Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$.

Ejercicio

Sea $a > 0$. Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$

Sugerencia: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{a^2+x^2}$

Ejemplo

Sean $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Mostraremos que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

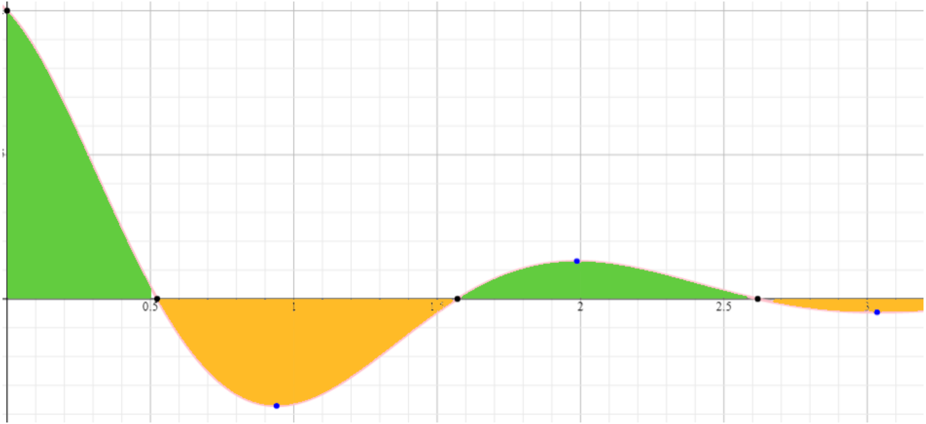


Figura: $f(x) = e^{-x}\cos(3x)$

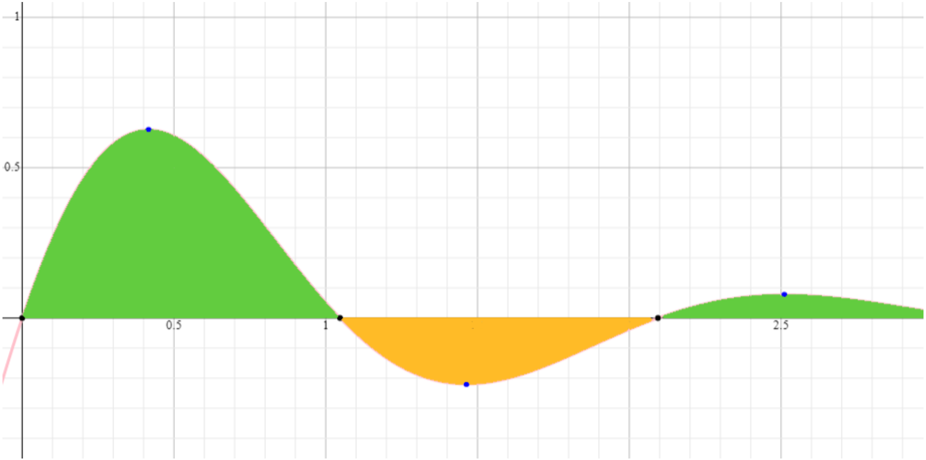


Figura: $f(x) = e^{-x} \sin(3x)$

Solución al ejemplo.

Primero notemos que podemos reescribir las dos integrales anteriores como

$$\int_0^{+\infty} \Re\left(e^{(-a+bi)x}\right) dx \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} \Im\left(e^{(-a+bi)x}\right) dx.$$

Solución al ejemplo.

Primero notemos que podemos reescribir las dos integrales anteriores como

$$\int_0^{+\infty} \Re\left(e^{(-a+bi)x}\right) dx \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} \Im\left(e^{(-a+bi)x}\right) dx.$$

Es decir

$$\Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x} dx\right) \quad \text{y} \quad \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x} dx\right).$$

Solución al ejemplo.

Primero notemos que podemos reescribir las dos integrales anteriores como

$$\int_0^{+\infty} \Re\left(e^{(-a+bi)x}\right) dx \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} \Im\left(e^{(-a+bi)x}\right) dx.$$

Es decir

$$\Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x} dx\right) \quad \text{y} \quad \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x} dx\right).$$

Así que basta con calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x} dx$.

$$\int_{0}^{+\infty} e^{(-a+bi)x}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{-a+bi}e^{(-a+bi)x}\Big|_{0}^{\beta}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{-a+bi}e^{(-a+bi)x}\Big|_0^{\beta}\right)$$
$$= \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{a+bi}{a^2+b^2}e^{(-a+bi)x}\Big|_0^{\beta}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{-a+bi}e^{(-a+bi)x}\Big|_0^{\beta}\right)$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{a+bi}{a^2+b^2}e^{(-a+bi)x}\Big|_0^{\beta}\right)$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{a+bi}{a^2+b^2}e^{-a\beta}e^{b\beta i}\right)+\frac{a+bi}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(\left.\frac{1}{-a+bi}e^{(-a+bi)x}\right|_0^{\beta}\right)$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\left(\left.-\frac{a+bi}{a^2+b^2}e^{(-a+bi)x}\right|_0^{\beta}\right)$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{a+bi}{a^2+b^2}e^{-a\beta}e^{b\beta i}\right)+\frac{a+bi}{a^2+b^2}$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{a+bi}{a^2+b^2}e^{-a\beta}e^{b\beta i}\right)+\frac{a+bi}{a^2+b^2}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x}\,dx &= \lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{-a+bi}e^{(-a+bi)x}\Bigg|_0^{\beta}\right)\\
&= \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{a+bi}{a^2+b^2}e^{(-a+bi)x}\Bigg|_0^{\beta}\right)\\
&= \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{a+bi}{a^2+b^2}e^{-a\beta}e^{b\beta i}\right)+\frac{a+bi}{a^2+b^2}\\
&= \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{a+bi}{a^2+b^2}e^{-a\beta}e^{b\beta i}\right)+\frac{a+bi}{a^2+b^2}\\
&= \frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{b}{a^2+b^2}.
\end{aligned}
$$

Tabla de contenidos

De la convergencia de integrales impropias para funciones no negativas

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}((a, b), \mathcal{F}, [0, +\infty)$. Suponga que:

- $\forall v \in (a, b) \quad f, g \in L^1((a, v), \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\forall x \in (a, b) \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Entonces

$$\int_a^{\to b} g \quad \text{converge} \implies \int_a^{\to b} f \quad \text{converge.}$$

De la convergencia de integrales impropias para funciones no negativas

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, [0,+\infty)$. Suponga que:

- $\forall v \in (a,b) \quad f, g \in L^1((a,v), \mathcal{F}, [0,+\infty))$,
- $\forall x \in (a,b) \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Entonces

$$\int_a^{\to b} g \quad \text{converge} \implies \int_a^{\to b} f \quad \text{converge.}$$

Demostración

Basta recordar que:

$$0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

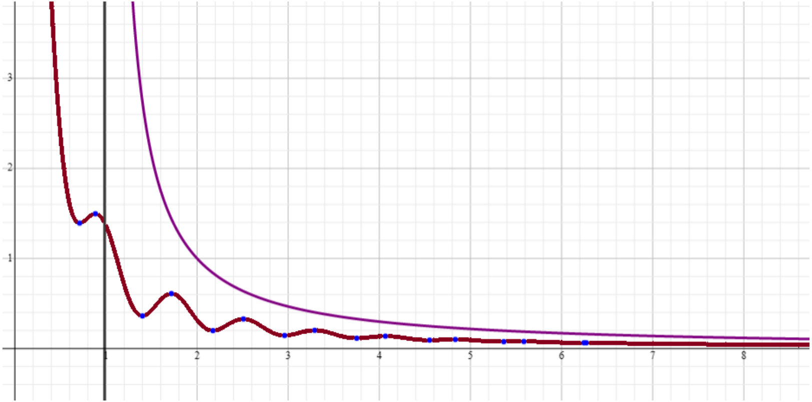


Figura: Condiciones iniciales

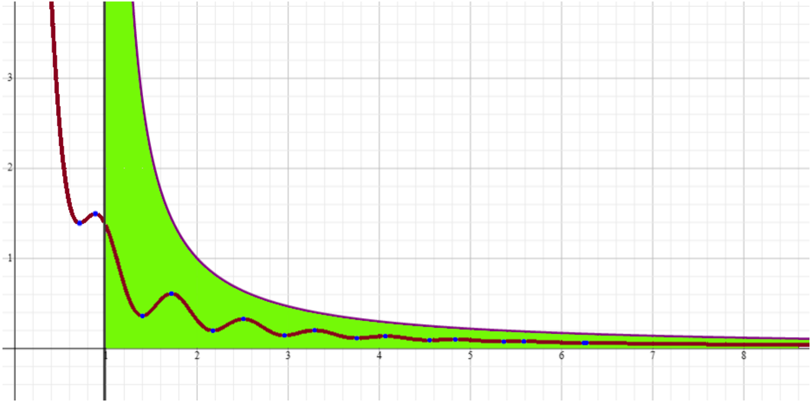


Figura: $\int_a^b g$ finita

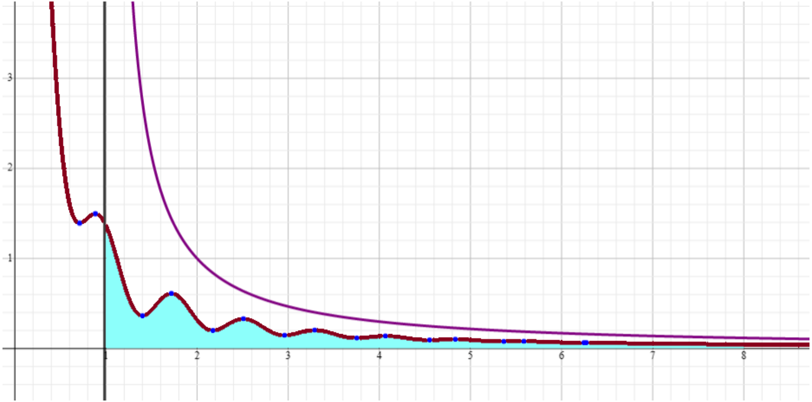


Figura: $\int_a^b f$ finita

Convergencia de integrales impropias para funciones no negativas

Corolario

Sean $f, g \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, [0,+\infty)$. Suponga que:

1. $\forall v \in (a,b) \quad f, g \in L^1((a,v), \mathcal{F}, [0,+\infty))$,
2. $\forall x \in (a,b) \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Entonces

$$\int_a^{\to b} f \quad \text{no converge} \implies \int_a^{\to b} g \quad \text{no converge.}$$

Propiedades de convergencia para funciones no negativas

Lema

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},[0,+\infty)$.

- Suponga que $\forall v \in (a,b) \quad f, g \in L^1((a,v),\mathcal{F},[0,+\infty))$.
- Sea $c > 0$.

Entonces

$$\int_a^{\to b} f \quad \text{converge} \Leftrightarrow \quad \int_a^{\to b} cf \quad \text{converge.}$$

Propiedades de convergencia para funciones no negativas

Lema

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},[0,+\infty)$.

- Suponga que $\forall v \in (a,b) \quad f,g \in L^1((a,v),\mathcal{F},[0,+\infty))$.
- Sea $c > 0$.

Entonces

$$\int_a^{\to b} f \quad \text{converge} \Leftrightarrow \quad \int_a^{\to b} cf \quad \text{converge.}$$

Basta recordar que:

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f.$$

Criterio de comparación del límite

Proposición

Sea $f, g \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, [0,+\infty)$. Suponga que:

- $\forall v \in (a,b) \quad f, g \in L^1((a,v), \mathcal{F}, [0.+\infty))$,
- $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Entonces

$$\int_a^{\to b} g \quad \text{converge} \Leftrightarrow \quad \int_a^{\to b} f \quad \text{converge.}$$

Criterio de comparación del límite

Demostración

Por hipótesis $\lim_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Criterio de comparación del límite

Demostración

Por hipótesis $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Entonces para $\epsilon = \frac{1}{2}$ se tiene que:

Criterio de comparación del límite

Demostración

Por hipótesis $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Entonces para $\epsilon = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$\exists v \in (a, b) \qquad \forall x \in (v, b) \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}.$$

Criterio de comparación del límite

Demostración

Por hipótesis $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Entonces para $\epsilon = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$\exists v \in (a, b) \qquad \forall x \in (v, b) \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

Esto es:

$$\frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x) \quad \forall x \in (v, b).$$

Criterio de comparación del límite

Demostración

Por hipótesis $\lim_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Entonces para $\epsilon = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$\exists v \in (a, b) \qquad \forall x \in (v, b) \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

Esto es:

$$\frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x) \quad \forall x \in (v, b).$$

Basta notar que:

$$0 \leq f \mathbb{1}_{(a,v)} + \frac{1}{2} g \mathbb{1}_{(v,b)} < f < f \mathbb{1}_{(a,v)} + \frac{3}{2} g \mathbb{1}_{(v,b)}$$

Tabla de contenidos

Ejercicios

Ejemplo

Investigar la convergencia de $\displaystyle\int_{0}^{\to 4} \frac{dx}{(4-x)^{\frac{2}{3}}}$.

Ejercicios

Ejemplo

Investigar la convergencia de $\displaystyle\int_{0}^{\to 4} \frac{dx}{(4-x)^{\frac{2}{3}}}$.

Sugerencias: Investigue la convergencia de $\displaystyle\int_{0}^{\to 4} \frac{dx}{4-x}$ y el $\displaystyle\lim_{x\to 4}(4-x)^{\frac{1}{3}}$.

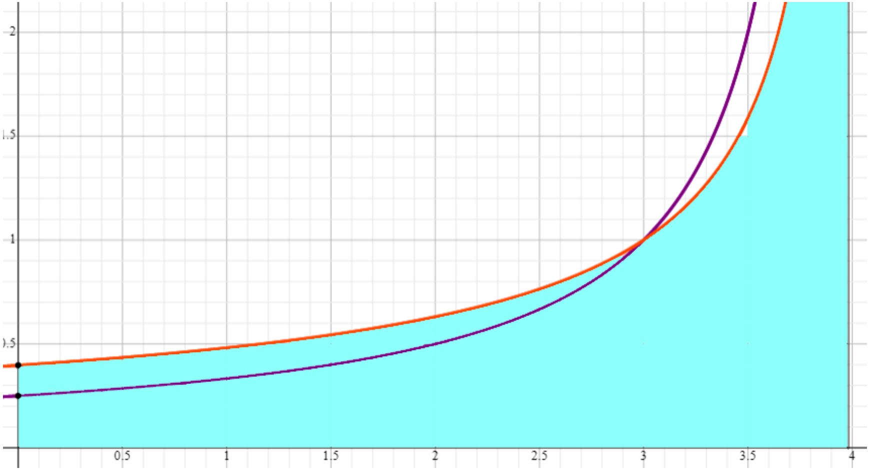


Figura: Gráfica de $f(x) = \frac{1}{(4-x)^{\frac{2}{3}}}$

Ejercicios

Ejemplo

Investigar la convergencia de $\displaystyle\int_{3}^{\to+\infty} \frac{x^2dx}{e^x}$.

Ejercicios

Ejemplo

Investigar la convergencia de $\displaystyle\int_{3}^{\to+\infty} \frac{x^2 dx}{e^x}$.

Sugerencia: Busque una función $g(x)$ con la cual pueda comparar $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

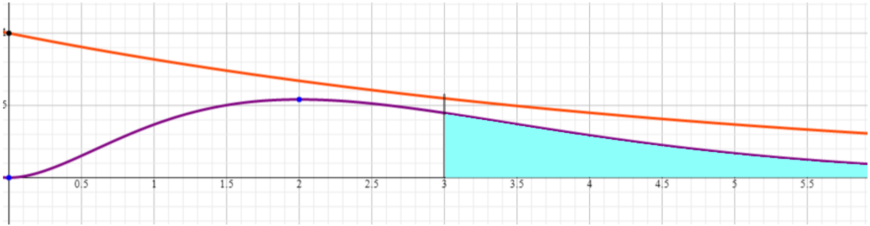


Figura: Gráfica de $f(x) = \frac{x^2 dx}{e^x}$

Ejercicios

Ejemplo

Investigar la convergencia de $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to 2} \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Ejercicios

Ejemplo

Investigar la convergencia de $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to 2} \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Sugerencia: Basta investigar la convergencia de $\displaystyle\int_{1}^{\to 2} \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

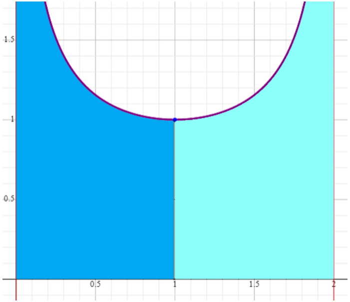


Figura: Gráfica de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$