La seminorma extendida $\mathcal{N}_\infty$ (un tema de Análisis Real)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2021-09-30

Objetivo:

dado un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$,
en el espacio $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ de las funciones medibles
introducir la seminorma extendida $\mathcal{N}_\infty$.

Objetivo:

dado un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$,
en el espacio $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ de las funciones medibles
introducir la seminorma extendida $\mathcal{N}_\infty$.

Prerrequisitos:

- el supremo esencial y sus propiedades básicas,
- el concepto de seminorma (o de seminorma extendida).

Objetivo:

dado un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$,
en el espacio $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ de las funciones medibles
introducir la seminorma extendida $\mathcal{N}_\infty$.

Prerrequisitos:

- el supremo esencial y sus propiedades básicas,
- el concepto de seminorma (o de seminorma extendida).

Aplicaciones:

- la definición de los espacios $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ y $L^\infty(X, \mu)$,
- acotación de algunas integrales.

Repaso: las cotas superiores esenciales de funciones positivas medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.
$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]) :=$ el conjunto de las funciones $X \to [0, +\infty]$, medibles respecto a $\mathcal{F}$.

En este tema, para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
$\mathcal{U}(f, \mu) :=$ el conjunto de las cotas superiores esenciales de f:

$$\mathcal{U}(f, \mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0, +\infty] : \quad \mu(\{x \in X : \; f(x) > v\}) = 0 \Big\}.$$

En otras palabras, v es una cota superior esencial de f (respecto a la medida μ) si, y solo si,

$$f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq} v.$$

Repaso: el supremo esencial de funciones positivas medibles

Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Repaso: el supremo esencial de funciones positivas medibles

Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Entonces $\quad \mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty].$

Definición de $\mathcal{N}_\infty$

Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$,

$$\mathcal{N}_\infty(f) := \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.$$

Definición de $\mathcal{N}_\infty$

Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$,

$$\mathcal{N}_\infty(f) := \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.$$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces $|f| \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq} \mathcal{N}_\infty(f)$, esto es,

$$\mu\left(\left\{x \in X\colon \quad |f(x)| > \mathcal{N}_\infty(f)\right\}\right) = 0.$$

Definición de $\mathcal{N}_\infty$

Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$,

$$\boxed{\mathcal{N}_\infty(f) := \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.}$$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces $\boxed{|f| \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq} \mathcal{N}_\infty(f)}$, esto es,

$$\mu\left(\left\{x \in X\colon \quad |f(x)| > \mathcal{N}_\infty(f)\right\}\right) = 0.$$

Demostración: $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} |f| \in \mathcal{U}(|f|, \mu)$.

Ejemplo: la función exponencial

Cuando consideramos $\mathbb{C}$ como un espacio topológico o un espacio de medida,

$$\text{identificamos } \mathbb{C} \text{ con } \mathbb{R}^2.$$

Ejemplo: la función exponencial

Cuando consideramos $\mathbb{C}$ como un espacio topológico o un espacio de medida,

$$\text{identificamos } \mathbb{C} \text{ con } \mathbb{R}^2.$$

Consideramos $\mathbb{C}$ con la σ-álgebra de Lebesgue y con la medida de Lebesgue μ_2.

Ejemplo: la función exponencial

Cuando consideramos $\mathbb{C}$ como un espacio topológico o un espacio de medida,

$$\text{identificamos } \mathbb{C} \text{ con } \mathbb{R}^2.$$

Consideramos $\mathbb{C}$ con la σ-álgebra de Lebesgue y con la medida de Lebesgue μ_2.

Consideremos $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Ejemplo: la función exponencial

Cuando consideramos $\mathbb{C}$ como un espacio topológico o un espacio de medida,

$$\text{identificamos } \mathbb{C} \text{ con } \mathbb{R}^2.$$

Consideramos $\mathbb{C}$ con la σ-álgebra de Lebesgue y con la medida de Lebesgue μ_2.

Consideremos $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Demostrar que $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$.

Ejemplo: la función exponencial

Cuando consideramos $\mathbb{C}$ como un espacio topológico o un espacio de medida,

$$\text{identificamos } \mathbb{C} \text{ con } \mathbb{R}^2.$$

Consideramos $\mathbb{C}$ con la σ-álgebra de Lebesgue y con la medida de Lebesgue μ_2.

Consideremos $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Demostrar que $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$. Demostrar que para cada $v > 0$,

$$\mu_2\bigl(\{z \in \mathbb{C}\colon\ |\exp(z)| > v\}\bigr) = +\infty.$$

Ejemplo: la función exponencial

Cuando consideramos $\mathbb{C}$ como un espacio topológico o un espacio de medida,

$$\text{identificamos } \mathbb{C} \text{ con } \mathbb{R}^2.$$

Consideramos $\mathbb{C}$ con la σ-álgebra de Lebesgue y con la medida de Lebesgue μ_2.

Consideremos $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Demostrar que $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$. Demostrar que para cada $v > 0$,

$$\mu_2\big(\{z \in \mathbb{C}\colon\ |\exp(z)| > v\}\big) = +\infty.$$

Conclusión: $\mathcal{N}_\infty(\exp) =$

Ejemplo: la función exponencial

Cuando consideramos $\mathbb{C}$ como un espacio topológico o un espacio de medida,

$$\text{identificamos } \mathbb{C} \text{ con } \mathbb{R}^2.$$

Consideramos $\mathbb{C}$ con la σ-álgebra de Lebesgue y con la medida de Lebesgue μ_2.

Consideremos $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Demostrar que $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$. Demostrar que para cada $v > 0$,

$$\mu_2\big(\{z \in \mathbb{C}\colon\ |\exp(z)| > v\}\big) = +\infty.$$

Conclusión: $\mathcal{N}_\infty(\exp) = +\infty$.

Propiedades aritméticas de $\mathcal{N}_\infty$

Las siguientes propiedades de $\mathcal{N}_\infty$ salen fácilmente de las propiedades de $\operatorname{ess\,sup}$.

Propiedades aritméticas de $\mathcal{N}_\infty$

Las siguientes propiedades de $\mathcal{N}_\infty$ salen fácilmente de las propiedades de $\operatorname{ess\,sup}$.

- La propiedad subaditiva:

$$\forall f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \mathcal{N}_\infty(f+g) \leq \mathcal{N}_\infty(f) + \mathcal{N}_\infty(g).$$

Propiedades aritméticas de $\mathcal{N}_\infty$

Las siguientes propiedades de $\mathcal{N}_\infty$ salen fácilmente de las propiedades de $\operatorname{ess\,sup}$.

- La propiedad subaditiva:

$$\forall f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \mathcal{N}_\infty(f+g) \le \mathcal{N}_\infty(f) + \mathcal{N}_\infty(g).$$

- La propiedad absolutamente homogénea:

$$\forall f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathcal{N}_\infty(\lambda f) = |\lambda|\, \mathcal{N}_\infty(f).$$

Propiedades aritméticas de $\mathcal{N}_\infty$

Las siguientes propiedades de $\mathcal{N}_\infty$ salen fácilmente de las propiedades de $\operatorname{ess\,sup}$.

- La propiedad subaditiva:

$$\forall f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \mathcal{N}_\infty(f+g) \le \mathcal{N}_\infty(f) + \mathcal{N}_\infty(g).$$

- La propiedad absolutamente homogénea:

$$\forall f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathcal{N}_\infty(\lambda f) = |\lambda| \mathcal{N}_\infty(f).$$

Estas propiedades significan que $\mathcal{N}_\infty$ es una seminorma extendida.

Usamos la palabra "extendida" porque se permite el valor $+\infty$.

¿Cuándo $\mathcal{N}_\infty(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\mathcal{N}_\infty(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xrightarrow{\ \mu\text{-c.t.p.}\ } 0.$$

¿Cuándo $\mathcal{N}_\infty(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\mathcal{N}_\infty(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

Demostración:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |f| \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$