Derivadas laterales superiores e inferiores, también conocidas como derivadas de Dini (un tema de análisis real)

Egor Maximenko,
con modificaciones de José Gerardo Santos Monzalvo
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

19 de octubre de 2021

Prerrequisitos

Antes de estudiar este tema, es necesario saber bien:

- los supremos e ínfimos, sus propiedades,
- la definición de límites laterales (por la izquierda y por la derecha),
- el criterio de existencia del límite en términos de límites laterales,
- la definición de la derivada y sus propiedades,
- la definición del límite superior e inferior,
- el criterio de existencia del límite en términos de límites superiores e inferiores.

Repaso: límites superiores laterales (por la izquierda y por la izquierda)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Repaso: límites superiores laterales (por la izquierda y por la izquierda)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

$$\limsup_{t \to x^+} f(t) \ :=$$

Repaso: límites superiores laterales (por la izquierda y por la izquierda)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) := \inf_{\delta>0} \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

Repaso: límites superiores laterales (por la izquierda y por la izquierda)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

$$\limsup_{t \to x^+} f(t) := \inf_{\delta > 0} \ \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

$$\limsup_{t \to x^-} f(t) :=$$

Repaso: límites superiores laterales (por la izquierda y por la izquierda)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) \;:=\; \inf_{\delta>0} \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

$$\limsup_{t\to x^-} f(t) \;:=\; \inf_{\delta>0} \sup_{t\in A\cap(x-\delta,x)} f(t).$$

Repaso: límites superiores laterales (por la izquierda y por la izquierda)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) := \inf_{\delta>0} \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

$$\limsup_{t\to x^-} f(t) := \inf_{\delta>0} \sup_{t\in A\cap(x-\delta,x)} f(t).$$

También se pueden expresar como límites:

Repaso: límites superiores laterales (por la izquierda y por la izquierda)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

$$\limsup_{t \to x^+} f(t) := \inf_{\delta > 0} \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

$$\limsup_{t \to x^-} f(t) := \inf_{\delta > 0} \sup_{t \in A \cap (x-\delta, x)} f(t).$$

También se pueden expresar como límites:

$$\limsup_{t \to x^+} f(t) =$$

Repaso: límites superiores laterales (por la izquierda y por la izquierda)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) \;:=\; \inf_{\delta>0}\ \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

$$\limsup_{t\to x^-} f(t) \;:=\; \inf_{\delta>0}\ \sup_{t\in A\cap(x-\delta,x)} f(t).$$

También se pueden expresar como límites:

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) \;=\; \lim_{\delta\to 0^+}\ \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t),$$

Repaso: límites superiores laterales (por la izquierda y por la izquierda)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) := \inf_{\delta>0} \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

$$\limsup_{t\to x^-} f(t) := \inf_{\delta>0} \sup_{t\in A\cap(x-\delta,x)} f(t).$$

También se pueden expresar como límites:

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t), \qquad \limsup_{t\to x^+} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{t\in A\cap(x-\delta,x)} f(t).$$

Repaso: límites inferiores laterales (por la derecha y por la izquierda)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) := \sup_{\delta>0} \inf_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

$$\liminf_{t\to x^-} f(t) := \sup_{\delta>0} \inf_{t\in A\cap(x-\delta,x)} f(t).$$

También se pueden expresar como límites:

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t), \qquad \liminf_{t\to x^-} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{t\in A\cap(x-\delta,x)} f(t).$$

Repaso: propiedades elementales de límites superiores e inferiores laterales

Proposición

$$\liminf_{t \to x^+} f(t) \leq \limsup_{t \to x^+} f(t).$$

Repaso: propiedades elementales de límites superiores e inferiores laterales

Proposición

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) \leq \limsup_{t\to x^+} f(t).$$

Proposición

$$\lim_{t\to x^+} f(t) = v \qquad \Longleftrightarrow \qquad \liminf_{t\to x^+} f(t) = \limsup_{t\to x^+} f(t) = v.$$

Repaso: propiedades elementales de límites superiores e inferiores laterales

Proposición

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) \leq \limsup_{t\to x^+} f(t).$$

Proposición

$$\lim_{t\to x^+} f(t) = v \qquad \Longleftrightarrow \qquad \liminf_{t\to x^+} f(t) = \limsup_{t\to x^+} f(t) = v.$$

De manera similar, para $t \to x^-$.

Definición de las derivadas de Dini

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, $x \in \operatorname{int}(A)$.

$$D^+ f(x) := \limsup_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \qquad D_+ f(x) := \liminf_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

$$D^- f(x) := \limsup_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \qquad D_- f(x) := \liminf_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Definiciones detalladas de las derivadas de Dini

$$(D^{-}f)(x) = \inf_{\eta>0} \sup_{t\in(x-\eta,x)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{\eta\to 0^{+}} \sup_{t\in(x-\eta,x)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Definiciones detalladas de las derivadas de Dini

$$(D^{-}f)(x) = \inf_{\eta>0} \sup_{t\in(x-\eta,x)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{\eta\to 0^{+}} \sup_{t\in(x-\eta,x)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

$$(D_{+}f)(x) = \sup_{\eta>0} \inf_{t\in(x,x+\eta)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{\eta\to 0^{+}} \inf_{t\in(x,x+\eta)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Definiciones detalladas de las derivadas de Dini

$$(D^- f)(x) = \inf_{\eta>0} \sup_{t\in(x-\eta,x)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{\eta\to 0^+} \sup_{t\in(x-\eta,x)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

$$(D_+ f)(x) = \sup_{\eta>0} \inf_{t\in(x,x+\eta)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{\eta\to 0^+} \inf_{t\in(x,x+\eta)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Ejercicio. Escribir de manera detallada las definiciones de $(D_- f)(x)$ y $(D^+ f)(x)$.

Proposición (desigualdades elementales entre las derivadas de Dini)

$$(D_+ f)(x) \le (D^+ f)(x), \qquad (D_- f)(x) \le (D^- f)(x).$$

Proposición (desigualdades elementales entre las derivadas de Dini)

$$(D_+ f)(x) \le (D^+ f)(x), \qquad (D_- f)(x) \le (D^- f)(x).$$

Demostración. En efecto, $\liminf \le \limsup$. $\square$

Proposición (criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x).$$

Más aún, en este caso todas las derivadas de Dini coinciden con $f'(x)$.

Proposición (criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x).$$

Más aún, en este caso todas las derivadas de Dini coinciden con $f'(x)$.

Demostración de la suficiencia. Suponemos

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x) \coloneqq v.$$

Proposición (criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x).$$

Más aún, en este caso todas las derivadas de Dini coinciden con $f'(x)$.

Demostración de la suficiencia. Suponemos

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x) \coloneqq v.$$

Esto implica, respectivamente,

Proposición (criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x).$$

Más aún, en este caso todas las derivadas de Dini coinciden con $f'(x)$.

Demostración de la suficiencia. Suponemos

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x) \coloneqq v.$$

Esto implica, respectivamente, $\displaystyle \lim_{t\to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = v$ y

Proposición (criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x).$$

Más aún, en este caso todas las derivadas de Dini coinciden con $f'(x)$.

Demostración de la suficiencia. Suponemos

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x) \coloneqq v.$$

Esto implica, respectivamente, $\displaystyle\lim_{t\to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = v$ y $\displaystyle\lim_{t\to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = v.$

Proposición (criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x).$$

Más aún, en este caso todas las derivadas de Dini coinciden con $f'(x)$.

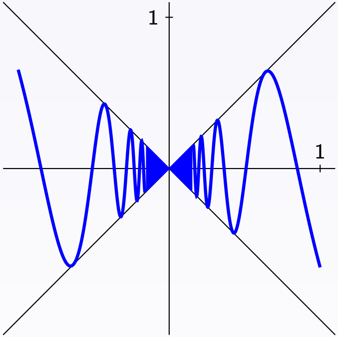
Demostración de la suficiencia. Suponemos

$$(D_+ f)(x) = (D^+ f)(x) = (D_- f)(x) = (D^- f)(x) \coloneqq v.$$

Esto implica, respectivamente, $\displaystyle\lim_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = v$ y $\displaystyle\lim_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = v$.

Luego $\displaystyle\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = v.$ $\square$

Ejemplo



$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} =$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^+ f)(0) =$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^+ f)(0) = \limsup_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t} \right) =$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^{+} f)(0) = \limsup_{t \to 0^{+}} \left(\cos \frac{4}{t} \right) = 1,$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^+ f)(0) = \limsup_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t} \right) = 1, \qquad (D_+ f)(0) =$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^{+} f)(0) = \limsup_{t \to 0^{+}} \left(\cos \frac{4}{t} \right) = 1, \qquad (D_{+} f)(0) = \liminf_{t \to 0^{+}} \left(\cos \frac{4}{t} \right) =$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x\cos\dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos\frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^{+}f)(0) = \limsup_{t\to 0^{+}} \left(\cos\frac{4}{t}\right) = 1, \qquad (D_{+}f)(0) = \liminf_{t\to 0^{+}} \left(\cos\frac{4}{t}\right) = -1,$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^+ f)(0) = \limsup_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t} \right) = 1, \qquad (D_+ f)(0) = \liminf_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t} \right) = -1,$$

$$(D^- f)(0) =$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x\cos\dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos\frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^{+}f)(0) = \limsup_{t\to 0^{+}} \left(\cos\frac{4}{t}\right) = 1, \qquad (D_{+}f)(0) = \liminf_{t\to 0^{+}} \left(\cos\frac{4}{t}\right) = -1,$$

$$(D^{-}f)(0) = \limsup_{t\to 0^{-}} \left(\cos\frac{4}{t}\right) =$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^+ f)(0) = \limsup_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t}\right) = 1, \qquad (D_+ f)(0) = \liminf_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t}\right) = -1,$$

$$(D^- f)(0) = \limsup_{t \to 0^-} \left(\cos \frac{4}{t}\right) = 1,$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^+ f)(0) = \limsup_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t} \right) = 1, \qquad (D_+ f)(0) = \liminf_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t} \right) = -1,$$

$$(D^- f)(0) = \limsup_{t \to 0^-} \left(\cos \frac{4}{t} \right) = 1, \qquad (D_- f)(0) =$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^+ f)(0) = \limsup_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t}\right) = 1, \qquad (D_+ f)(0) = \liminf_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t}\right) = -1,$$

$$(D^- f)(0) = \limsup_{t \to 0^-} \left(\cos \frac{4}{t}\right) = 1, \qquad (D_- f)(0) = \liminf_{t \to 0^-} \left(\cos \frac{4}{t}\right) =$$

Ejemplo (calculamos las derivadas de Dini en el punto 0)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \cos \dfrac{4}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \cos \frac{4}{t}.$$

Luego

$$(D^+ f)(0) = \limsup_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t}\right) = 1, \qquad (D_+ f)(0) = \liminf_{t \to 0^+} \left(\cos \frac{4}{t}\right) = -1,$$

$$(D^- f)(0) = \limsup_{t \to 0^-} \left(\cos \frac{4}{t}\right) = 1, \qquad (D_- f)(0) = \liminf_{t \to 0^-} \left(\cos \frac{4}{t}\right) = -1.$$

Proposición (la derivada superior derecha de la función “opuesta”)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Definimos $g\colon A \to \mathbb{R}$ como $g(x) := -f(x)$.
Entonces para cada x en $\operatorname{int}(A)$, $\quad (D^+ g)(x) = -(D_+ f)(x)$.

Proposición (la derivada superior derecha de la función "opuesta")

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Definimos $g\colon A \to \mathbb{R}$ como $g(x) := -f(x)$.
Entonces para cada x en $\operatorname{int}(A)$, $\qquad (D^+ g)(x) = -(D_+ f)(x).$

Demostración.

$$(D^+ g)(x) =$$

Proposición (la derivada superior derecha de la función “opuesta”)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$. Definimos $g\colon A\to\mathbb{R}$ como $g(x):=-f(x)$.
Entonces para cada x en $\operatorname{int}(A)$, $\qquad (D^+g)(x)=-(D_+f)(x)$.

Demostración.

$$(D^+g)(x)=\limsup_{t\to x^+}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}=$$

Proposición (la derivada superior derecha de la función "opuesta")

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Definimos $g\colon A \to \mathbb{R}$ como $g(x) := -f(x)$.
Entonces para cada x en $\operatorname{int}(A)$, $\quad (D^+ g)(x) = -(D_+ f)(x)$.

Demostración.

$$(D^+ g)(x) = \limsup_{t \to x^+} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = \inf_{\eta > 0} \sup_{t \in (x, x+\eta)} \frac{-(f(t) - f(x))}{t - x}.$$

Proposición (la derivada superior derecha de la función "opuesta")

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$. Definimos $g\colon A\to\mathbb{R}$ como $g(x) := -f(x)$.
Entonces para cada x en $\operatorname{int}(A)$, $\quad (D^+g)(x) = -(D_+f)(x)$.

Demostración.

$$(D^+g)(x) = \limsup_{t\to x^+} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} = \inf_{\eta>0} \sup_{t\in(x,x+\eta)} \frac{-(f(t)-f(x))}{t-x}.$$

Aplicamos propiedades de sup e inf para "sacar" el signo:

$$(D^+g)(x) =$$

Proposición (la derivada superior derecha de la función “opuesta”)

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Definimos $g\colon A \to \mathbb{R}$ como $g(x) := -f(x)$.
Entonces para cada x en $\operatorname{int}(A)$, $\qquad (D^+ g)(x) = -(D_+ f)(x)$.

Demostración.

$$(D^+ g)(x) = \limsup_{t \to x^+} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = \inf_{\eta > 0} \sup_{t \in (x, x+\eta)} \frac{-(f(t) - f(x))}{t - x}.$$

Aplicamos propiedades de sup e inf para “sacar” el signo:

$$(D^+ g)(x) = -\sup_{\eta > 0} \inf_{t \in (x, x+\eta)} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} =$$

Proposición (la derivada superior derecha de la función "opuesta")

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Definimos $g\colon A \to \mathbb{R}$ como $g(x) := -f(x)$.
Entonces para cada x en $\operatorname{int}(A)$, $\quad (D^+g)(x) = -(D_+f)(x)$.

Demostración.

$$(D^+g)(x) = \limsup_{t\to x^+} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} = \inf_{\eta>0} \sup_{t\in(x,x+\eta)} \frac{-(f(t)-f(x))}{t-x}.$$

Aplicamos propiedades de sup e inf para "sacar" el signo:

$$(D^+g)(x) = -\sup_{\eta>0} \inf_{t\in(x,x+\eta)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = -(D_+f)(x). \qquad \square$$

Proposición (la derivada superior derecha de la función “reflejada”)

Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Definimos $B := -A$, $h\colon B \to \mathbb{R}$, $h(x) := f(-x)$.
Entonces para cada x en $\operatorname{int}(B)$, $$(D^+ h)(x) = -(D_- f)(-x).$$

Proposición (la derivada superior derecha de la función "reflejada")

Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Definimos $B := -A$, $h\colon B \to \mathbb{R}$, $h(x) := f(-x)$.
Entonces para cada x en $\operatorname{int}(B)$, $\qquad (D^+h)(x) = -(D_-f)(-x)$.

Demostración. $$(D^+h)(x) = \limsup_{t\to x^+} \frac{h(t)-h(x)}{t-x} = \inf_{\eta>0} \sup_{t\in(x,x+\eta)} \frac{f(-t)-f(-x)}{t-x}.$$

Proposición (la derivada superior derecha de la función "reflejada")

Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Definimos $B := -A$, $h\colon B \to \mathbb{R}$, $h(x) := f(-x)$.
Entonces para cada x en $\operatorname{int}(B)$, $\qquad (D^+h)(x) = -(D_-f)(-x)$.

Demostración. $\quad (D^+h)(x) = \limsup\limits_{t\to x^+} \dfrac{h(t)-h(x)}{t-x} = \inf\limits_{\eta>0} \sup\limits_{t\in(x,x+\eta)} \dfrac{f(-t)-f(-x)}{t-x}$.

Hacemos el cambio de variable $u = -t$:

$$(D^+h)(x) = \inf_{\eta>0} \sup_{u\in(-x-\eta,-x)} \frac{f(u)-f(-x)}{-u-x}.$$

Aplicamos propiedades de sup e inf para sacar el signo:

$$(D^+h)(x) = -\sup_{\eta>0} \inf_{u\in(-x-\eta,-x)} \frac{f(u)-f(-x)}{u-(-x))} = -(D_-f)(-x). \qquad \square$$

Ejercicios: las derivadas de Dini de la función opuesta o reflejada

Ejercicio. Hallar fórmulas para otras derivadas de Dini de la función

$$g(x) := -f(x).$$

Ejercicios: las derivadas de Dini de la función opuesta o reflejada

Ejercicio. Hallar fórmulas para otras derivadas de Dini de la función

$$g(x) \coloneqq -f(x).$$

Ejercicio. Hallar fórmulas para otras derivadas de Dini de la función

$$h(x) \coloneqq f(-x).$$

Las derivadas de Dini de una función creciente

Ejercicio. Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente. Mostrar que para cada x en $\operatorname{int}(A)$,

$$(D^+ f)(x) \geq (D_+ f)(x) \geq 0, \qquad (D^- f)(x) \geq (D_- f)(x) \geq 0.$$

Sugerencia: analizar el signo del cociente

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Criterio de igualdad de cuatro números reales, en términos de una cadena de desigualdades

Proposición

Sean $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 \quad \Longleftrightarrow \quad v_1 \le v_2 \le v_3 \le v_4 \le v_1.$$

Sugiero buscar dos dibujos de Maurits Cornelis Escher:

“Ascending and descending”

“Waterfall”

En estos dibujos Escher muestra “contraejemplos” (imposibles) a la proposición anterior.

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+f)(x) \le (D_-f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^-f)(x) \le (D_+f)(x). \tag{1}$$

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f : A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+ f)(x) \le (D_- f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^- f)(x) \le (D_+ f)(x). \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$. Si f es derivable en x, entonces las 4 derivadas de Dini coinciden.

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+f)(x) \le (D_-f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^-f)(x) \le (D_+f)(x). \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$. Si f es derivable en x, entonces las 4 derivadas de Dini coinciden.

$\Leftarrow$.

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+ f)(x) \le (D_- f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^- f)(x) \le (D_+ f)(x). \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$. Si f es derivable en x, entonces las 4 derivadas de Dini coinciden.

$\Leftarrow$. Recordemos que siempre

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f \colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+ f)(x) \leq (D_- f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^- f)(x) \leq (D_+ f)(x). \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$. Si f es derivable en x, entonces las 4 derivadas de Dini coinciden.

$\Leftarrow$. Recordemos que siempre $\quad (D_- f)(x) \leq (D^- f)(x) \quad$ y

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+ f)(x) \le (D_- f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^- f)(x) \le (D_+ f)(x). \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$. Si f es derivable en x, entonces las 4 derivadas de Dini coinciden.

$\Leftarrow$. Recordemos que siempre $\quad (D_- f)(x) \le (D^- f)(x) \quad$ y $\quad (D_+ f)(x) \le (D^+ f)(x)$.

Si se cumple (1), entonces construimos una cadena cerrada:

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+f)(x) \le (D_-f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^-f)(x) \le (D_+f)(x). \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$. Si f es derivable en x, entonces las 4 derivadas de Dini coinciden.

$\Leftarrow$. Recordemos que siempre $\quad (D_-f)(x) \le (D^-f)(x) \quad$ y $\quad (D_+f)(x) \le (D^+f)(x)$.

Si se cumple (1), entonces construimos una cadena cerrada:

$$(D_-f)(x) \ \le$$

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+f)(x) \le (D_-f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^-f)(x) \le (D_+f)(x). \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$. Si f es derivable en x, entonces las 4 derivadas de Dini coinciden.

$\Leftarrow$. Recordemos que siempre $\quad (D_-f)(x) \le (D^-f)(x) \quad$ y $\quad (D_+f)(x) \le (D^+f)(x)$.

Si se cumple (1), entonces construimos una cadena cerrada:

$$(D_-f)(x) \;\le\; (D^-f)(x) \le$$

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+ f)(x) \le (D_- f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^- f)(x) \le (D_+ f)(x). \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$. Si f es derivable en x, entonces las 4 derivadas de Dini coinciden.

$\Leftarrow$. Recordemos que siempre $\quad (D_- f)(x) \le (D^- f)(x) \quad$ y $\quad (D_+ f)(x) \le (D^+ f)(x)$.

Si se cumple (1), entonces construimos una cadena cerrada:

$$(D_- f)(x) \ \le \ (D^- f)(x) \ \le \ (D_+ f)(x) \ \le$$

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+f)(x) \le (D_-f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^-f)(x) \le (D_+f)(x). \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$. Si f es derivable en x, entonces las 4 derivadas de Dini coinciden.

$\Leftarrow$. Recordemos que siempre $\quad (D_-f)(x) \le (D^-f)(x) \quad$ y $\quad (D_+f)(x) \le (D^+f)(x)$.

Si se cumple (1), entonces construimos una cadena cerrada:

$$(D_-f)(x) \ \le\ (D^-f)(x) \le (D_+f)(x) \ \le\ (D^+f)(x) \le$$

Criterio de derivabilidad en términos de las derivadas de Dini

Proposición

Sean A in intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$.

Entonces f es derivable en x si, y solo si,

$$(D^+ f)(x) \le (D_- f)(x) \qquad \wedge \qquad (D^- f)(x) \le (D_+ f)(x). \tag{1}$$

Demostración. $\Rightarrow$. Si f es derivable en x, entonces las 4 derivadas de Dini coinciden.

$\Leftarrow$. Recordemos que siempre $\quad (D_- f)(x) \le (D^- f)(x) \quad$ y $\quad (D_+ f)(x) \le (D^+ f)(x)$.

Si se cumple (1), entonces construimos una cadena cerrada:

$$(D_- f)(x) \ \le \ (D^- f)(x) \ \le \ (D_+ f)(x) \ \le \ (D^+ f)(x) \ \le \ (D_- f)(x). \qquad \square$$

Análisis de la desigualdad $(D^+ f)(x) > u$

Ejercicio. Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$, $u \in \mathbb{R}$.
Supongamos que

$$(D^+ f)(x) > u.$$

Demostrar que

$$\forall \delta > 0 \qquad \exists t \in (x, x+\delta) \qquad \frac{f(t) - f(x)}{t - x} > u.$$

Análisis de la desigualdad $(D^+f)(x) > u$

Ejercicio. Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int}(A)$, $u \in \mathbb{R}$.
Supongamos que

$$(D^+f)(x) > u.$$

Demostrar que

$$\forall \delta > 0 \qquad \exists t \in (x, x+\delta) \qquad \frac{f(t) - f(x)}{t - x} > u.$$

Ejercicio más complicado. Determinar si en el ejercicio anterior se tiene $\Longleftrightarrow$.

Ejercicios: derivadas de Dini en máximos y mínimos locales

Ejercicio. Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua, $c \in \operatorname{int}(A)$. Supongamos que f tiene un máximo local en c. Demostrar que

$$(D_+ f)(c) \le (D^+ f)(c) \le 0 \le (D_- f)(c) \le (D^- f)(c).$$

Ejercicios: derivadas de Dini en máximos y mínimos locales

Ejercicio. Sean A un intervalo, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua, $c \in \operatorname{int}(A)$. Supongamos que f tiene un máximo local en c. Demostrar que

$$(D_+ f)(c) \le (D^+ f)(c) \le 0 \le (D_- f)(c) \le (D^- f)(c).$$

Ejercicio. Enunciar y demostrar una afirmación similar para un mínimo local.