Criterio de Cauchy para límite de funciones.

Antonio Jimárez Escamilla y Abdiel Rolando Marquez Meza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

22 de mayo de 2020

Criterio de Heine

Teorema

Sean:

- $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos,
- $f : X \to Y$ una función,
- $a \in X$, $b \in Y$.

Suponga además que existe una base local numerable de la topoogía τ_X en el punto a. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\lim_{x \to a} f(x) = b$,

b) $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus \{a\} \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = a \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = b$.

Criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función

Proposición

Sean:

- (X, τ) un espacio topologico,
- (Y, d) un espacio métrico completo,
- $M \subset X$,
- $a \subset X$ un punto de acumulación en X,
- $f : M \to Y$ una función.

Suponga además que existe una base local numerable de τ en a.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$,

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists V \in \tau(a)$ tal que $\forall x, y \in V \ d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Demostracion $a) \implies b)$

Supongamos
$\lim_{x \to a} f(x) = b$

$\frac{\epsilon}{2} > 0$

Demostracion $a) \implies b)$

Supongamos $\lim_{x \to a} f(x) = b$

$\frac{\epsilon}{2} > 0$

$\exists V \in \tau(a) \; \forall x \in V$
$d(f(x), b) < \frac{\epsilon}{2}$

Demostracion $a) \implies b)$

Supongamos
$\lim_{x \to a} f(x) = b$

$\frac{\epsilon}{2} > 0$

$\exists V \in \tau(a)\ \forall x \in V$
$d(f(x), b) < \frac{\epsilon}{2}$

$x, y \in V$

Demostracion $a) \Longrightarrow b)$

Supongamos
$\lim_{x \to a} f(x) = b$

$\frac{\epsilon}{2} > 0$

$\exists V \in \tau(a) \ \forall x \in V$
$d(f(x), b) < \frac{\epsilon}{2}$

$x, y \in V$

$d(f(x), b) < \frac{\epsilon}{2}$
$d(f(y), b) < \frac{\epsilon}{2}$

Demostracion $a) \implies b)$

Supongamos
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$\frac{\epsilon}{2} > 0$$

$$\exists V \in \tau(a)\ \forall x \in V$$
$$d(f(x), b) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$x, y \in V$$

$$d(f(x), b) < \frac{\epsilon}{2}$$
$$d(f(y), b) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Demostracion $b) \implies a)$

Sea $\varepsilon > 0$

Sea $(x_n)_{n\in}$
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Demostracion $b) \implies a)$

$$\text{Sea } \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists V \in \tau(a)$$

Sea $(x_n)_{n\in}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Demostracion $b) \implies a)$

Sea $\varepsilon > 0$

$\exists V \in \tau(a)$

$\forall x, y \in V$
$d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Sea $(x_n)_{n\in}$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Demostracion $b) \implies a)$

Sea $\varepsilon > 0$

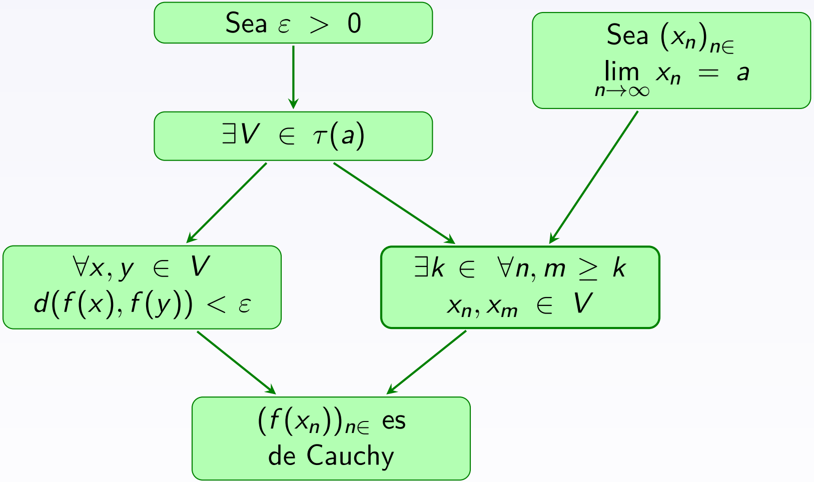
$\exists V \in \tau(a)$

$\forall x, y \in V$
$d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Sea $(x_n)_{n\in}$
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$

$\exists k \in \ \forall n, m \geq k$
$x_n, x_m \in V$

Demostracion $b) \Longrightarrow a)$



Demostracion $b) \implies a)$