# Transformación de Abel para las sumas de productos (un tema de análisis real)

Egor Maximenko
https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2024-12-09

## Proposición (sobre sumas telescópicas)

Sean $x_0, \ldots, x_n$ elementos de algún grupo conmutativo. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0.$$

## Proposición (sobre sumas telescópicas)

Sean $x_0, \dots, x_n$ elementos de algún grupo conmutativo. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0.$$

**Demostración.**

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}$$

□

### Proposición (sobre sumas telescópicas)

Sean $x_0, \ldots, x_n$ elementos de algún grupo conmutativo. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0.$$

**Demostración.**

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{j=0}^{n-1} x_j$$

□

### Proposición (sobre sumas telescópicas)

Sean $x_0, \ldots, x_n$ elementos de algún grupo conmutativo. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{j=0}^{n-1} x_j \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) + x_n - x_0 - \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j\right)\end{aligned}$$

$\square$

## Proposición (sobre sumas telescópicas)

Sean $x_0, \dots, x_n$ elementos de algún grupo conmutativo. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{j=0}^{n-1} x_j \\ &= \left( \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right) + x_n - x_0 - \left( \sum_{j=1}^{n-1} x_j \right) = x_n - x_0.\end{aligned}$$

$\square$

# El truco principal en este tema

$$ab - cd =$$

# El truco principal en este tema

$$ab - cd = ab - ad + ad - cd =$$

# El truco principal en este tema

$$ab - cd = ab - ad + ad - cd = a(b - d) + (a - c)d.$$

### Proposición (transformada de Abel para las sumas)

Sean $U_0, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ elementos de un anillo. Entonces

$$U_n V_n - U_0 V_0 = \sum_{k=1}^{n} U_k (V_k - V_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

### Proposición (transformada de Abel para las sumas)

Sean $U_0, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ elementos de un anillo. Entonces

$$U_n V_n - U_0 V_0 = \sum_{k=1}^{n} U_k (V_k - V_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

**Demostración.** Para cada $k$ en $\{1, \ldots, n\}$,

$$U_k V_k - U_{k-1} V_{k-1} =$$

**Proposición (transformada de Abel para las sumas)**

Sean $U_0, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ elementos de un anillo. Entonces

$$U_n V_n - U_0 V_0 = \sum_{k=1}^{n} U_k (V_k - V_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

**Demostración.** Para cada $k$ en $\{1, \ldots, n\}$,

$$U_k V_k - U_{k-1} V_{k-1} = U_k (V_k - V_{k-1}) + (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

## Proposición (transformada de Abel para las sumas)

Sean $U_0, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ elementos de un anillo. Entonces

$$U_n V_n - U_0 V_0 = \sum_{k=1}^{n} U_k (V_k - V_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

**Demostración.** Para cada $k$ en $\{1, \ldots, n\}$,

$$U_k V_k - U_{k-1} V_{k-1} = U_k (V_k - V_{k-1}) + (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

Sumamos sobre $k$. En el lado izquierdo tenemos una suma telescópica. $\square$

| | |
|---|---|
| $U_0$ | $V_0$ |
| $U_1$ | $V_1$ |
| $U_2$ | $V_2$ |
| $U_3$ | $V_3$ |

$$U_1 V_1 - U_0 V_0$$

$U_0$ $V_0$

$U_1$ $V_1$

$U_2$ $V_2$

$U_3$ $V_3$

$$U_1(V_1 - V_0) + (U_1 - U_0)V_0$$

$U_0 \qquad V_0$

$$U_1 V_1 - U_0 V_0 \qquad\qquad U_1(V_1 - V_0) + (U_1 - U_0)V_0$$

$U_1 \qquad V_1$

$$U_2 V_2 - U_1 V_1 \qquad\qquad U_2(V_2 - V_1) + (U_2 - U_1)V_1$$

$U_2 \qquad V_2$

$U_3 \qquad V_3$

$U_0$ $V_0$

$U_1 V_1 - U_0 V_0$ $\quad$ $U_1(V_1 - V_0) + (U_1 - U_0)V_0$

$U_1$ $V_1$

$U_2 V_2 - U_1 V_1$ $\quad$ $U_2(V_2 - V_1) + (U_2 - U_1)V_1$

$U_2$ $V_2$

$U_3 V_3 - U_2 V_2$ $\quad$ $U_3(V_3 - V_2) + (U_3 - U_2)V_2$

$U_3$ $V_3$

$U_0 \quad V_0$

$U_1 V_1 - U_0 V_0 \qquad U_1(V_1 - V_0) + (U_1 - U_0)V_0$

$U_1 \quad V_1$

$U_2 V_2 - U_1 V_1 \qquad U_2(V_2 - V_1) + (U_2 - U_1)V_1$

$U_2 \quad V_2$

$U_3 V_3 - U_2 V_2 \qquad U_3(V_3 - V_2) + (U_3 - U_2)V_2$

$U_3 \quad V_3$

$$U_3 V_3 - V_0 V_0 = \sum_{k=1}^{3} U_k(V_k - V_{k-1}) + \sum_{k=1}^{3}(U_k - U_{k-1})V_{k-1}$$

Repetimos la fórmula demostrada:

$$U_n V_n - U_0 V_0 = \sum_{k=1}^{n} U_k (V_k - V_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

Repetimos la fórmula demostrada:

$$U_n V_n - U_0 V_0 = \sum_{k=1}^{n} U_k (V_k - V_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

Podemos despejar una de las sumas:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k (V_k - V_{k-1}) = U_n V_n - U_0 V_0 - \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

A veces, hay que trabajar con índices que empiezan no desde 0, sino desde otro número entero.

### Proposición (transformada de Abel para las sumas)

Sean $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$.

Sea $\mathcal{A}$ un anillo, y sean $U_p, \ldots, U_q, V_p, \ldots, V_q$ elementos de $\mathcal{A}$.

Entonces

$$\sum_{k=p+1}^{q} U_k(V_k - V_{k-1}) = U_q V_q - U_p V_p - \sum_{k=p+1}^{q} (U_k - U_{k-1})V_{k-1}.$$

A veces, hay que trabajar con índices que empiezan no desde 0, sino desde otro número entero.

### Proposición (transformada de Abel para las sumas)

Sean $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$.

Sea $\mathcal{A}$ un anillo, y sean $U_p, \ldots, U_q, V_p, \ldots, V_q$ elementos de $\mathcal{A}$.

Entonces

$$\boxed{\sum_{k=p+1}^{q} U_k(V_k - V_{k-1}) = U_q V_q - U_p V_p - \sum_{k=p+1}^{q} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.}$$

La demostración es similar a la anterior.

### Proposición

Sean $p, q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p \leq q$.

Sea $\mathcal{A}$ un anillo, y sean $U_p, \ldots, U_q, v_0, \ldots, v_q$ elementos de $\mathcal{A}$.

Pongamos

$$V_j := \sum_{k=0}^{j} v_k.$$

Entonces

$$\sum_{k=p+1}^{q} U_k v_k = U_q V_q - U_p V_p - \sum_{k=p+1}^{q} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

## Proposición

Sean $p, q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p \leq q$.

Sea $\mathcal{A}$ un anillo, y sean $U_p, \ldots, U_q, v_0, \ldots, v_q$ elementos de $\mathcal{A}$.

Pongamos

$$V_j := \sum_{k=0}^{j} v_k.$$

Entonces

$$\sum_{k=p+1}^{q} U_k v_k = U_q V_q - U_p V_p - \sum_{k=p+1}^{q} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

Es un corolario de la proposición anterior.

## Proposición

Sean $p, q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p \leq q$.

Sea $\mathcal{A}$ un anillo, y sean $U_p, \ldots, U_q, v_0, \ldots, v_q$ elementos de $\mathcal{A}$.

Pongamos

$$V_j := \sum_{k=0}^{j} v_k.$$

Entonces

$$\sum_{k=p+1}^{q} U_k v_k = U_q V_q - U_p V_p - \sum_{k=p+1}^{q} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

Es un corolario de la proposición anterior. $\quad v_k =$

## Proposición

Sean $p, q \in \mathbb{Z}$, $0 \le p \le q$.

Sea $\mathcal{A}$ un anillo, y sean $U_p, \ldots, U_q, v_0, \ldots, v_q$ elementos de $\mathcal{A}$.

Pongamos

$$V_j := \sum_{k=0}^{j} v_k.$$

Entonces

$$\sum_{k=p+1}^{q} U_k v_k = U_q V_q - U_p V_p - \sum_{k=p+1}^{q} (U_k - U_{k-1}) V_{k-1}.$$

Es un corolario de la proposición anterior. $\quad v_k = V_k - V_{k-1}$.

# Ejemplo

Sea $x \in (0, 2\pi)$. Demostremos la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}}{k}.$$

# Ejemplo

Sea $x \in (0, 2\pi)$. Demostremos la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}}{k}.$$

Apliquemos el criterio de Cauchy (para series) y la transformada de Abel.

# Ejemplo

Sea $x \in (0, 2\pi)$. Demostremos la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}}{k}.$$

Apliquemos el criterio de Cauchy (para series) y la transformada de Abel.

Usamos la fórmula para la suma de la progresión geométrica (finita)
para calcular las sumas parciales de $\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}$:

$$V_n := \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} =$$

# Ejemplo

Sea $x \in (0, 2\pi)$. Demostremos la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}}{k}.$$

Apliquemos el criterio de Cauchy (para series) y la transformada de Abel.

Usamos la fórmula para la suma de la progresión geométrica (finita) para calcular las sumas parciales de $\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}$:

$$V_n := \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\,\mathrm{i}\,x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1} =$$

# Ejemplo

Sea $x \in (0, 2\pi)$. Demostremos la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}}{k}.$$

Apliquemos el criterio de Cauchy (para series) y la transformada de Abel.

Usamos la fórmula para la suma de la progresión geométrica (finita) para calcular las sumas parciales de $\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}$:

$$V_n := \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\,\mathrm{i}\,x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{(n+1)\,\mathrm{i}\,x}{2}} \left( \mathrm{e}^{\frac{(n+1)\,\mathrm{i}\,x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{(n+1)\,\mathrm{i}\,x}{2}} \right)}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,x}{2}} \left( \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,x}{2}} \right)} =$$

# Ejemplo

Sea $x \in (0, 2\pi)$. Demostremos la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}}{k}.$$

Apliquemos el criterio de Cauchy (para series) y la transformada de Abel.

Usamos la fórmula para la suma de la progresión geométrica (finita) para calcular las sumas parciales de $\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}$:

$$V_n := \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\,\mathrm{i}\,x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{(n+1)\,\mathrm{i}\,x}{2}} \left( \mathrm{e}^{\frac{(n+1)\,\mathrm{i}\,x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{(n+1)\,\mathrm{i}\,x}{2}} \right)}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,x}{2}} \left( \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,x}{2}} \right)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}} \operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

# Ejemplo

Hemos calculado las sumas parciales de $\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}$:

$$V_n := \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}} \operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

# Ejemplo

Hemos calculado las sumas parciales de $\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}$:

$$V_n := \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}} \operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

La condición $x \in (0, 2\pi)$ implica que $\operatorname{sen} \frac{x}{2} > 0$.

# Ejemplo

Hemos calculado las sumas parciales de $e^{k\,i\,x}$:

$$V_n := \sum_{k=0}^{n} e^{k\,i\,x} = \frac{e^{i\,\frac{nx}{2}} \operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

La condición $x \in (0, 2\pi)$ implica que $\operatorname{sen} \frac{x}{2} > 0$.

Las sumas parciales $|V_n|$ son acotadas (por un número que no depende de $n$):

$$|V_n| \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

# Ejemplo

Ahora consideramos un "trozo" de la serie y aplicamos la transformada de Abel:

$$\sum_{k=p+1}^{q} \frac{e^{k\,i\,x}}{k} = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{V_k - V_{k-1}}{k} = \frac{V_q}{q} - \frac{V_p}{p} - \sum_{k=p+1}^{q} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) V_{k-1}.$$

# Ejemplo

Ahora consideramos un "trozo" de la serie y aplicamos la transformada de Abel:

$$\sum_{k=p+1}^{q} \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}}{k} = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{V_k - V_{k-1}}{k} = \frac{V_q}{q} - \frac{V_p}{p} - \sum_{k=p+1}^{q} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) V_{k-1}.$$

Acotamos estos trozos:

$$\left| \sum_{k=p+1}^{q} \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}}{k} \right| \leq \frac{1}{q \operatorname{sen} \frac{x}{2}} + \frac{1}{p \operatorname{sen} \frac{x}{2}} + \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \sum_{k=p+1}^{q} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{2}{p \operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

# Ejemplo

Ahora consideramos un “trozo” de la serie y aplicamos la transformada de Abel:

$$\sum_{k=p+1}^{q} \frac{e^{k\,i\,x}}{k} = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{V_k - V_{k-1}}{k} = \frac{V_q}{q} - \frac{V_p}{p} - \sum_{k=p+1}^{q} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) V_{k-1}.$$

Acotamos estos trozos:

$$\left| \sum_{k=p+1}^{q} \frac{e^{k\,i\,x}}{k} \right| \leq \frac{1}{q \operatorname{sen} \frac{x}{2}} + \frac{1}{p \operatorname{sen} \frac{x}{2}} + \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \sum_{k=p+1}^{q} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{p \operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

La última expresión tiende a cero, cuando $p$ tiende al infinito.

# Ejemplo

Ahora consideramos un "trozo" de la serie y aplicamos la transformada de Abel:

$$\sum_{k=p+1}^{q} \frac{e^{k\,i\,x}}{k} = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{V_k - V_{k-1}}{k} = \frac{V_q}{q} - \frac{V_p}{p} - \sum_{k=p+1}^{q} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) V_{k-1}.$$

Acotamos estos trozos:

$$\left| \sum_{k=p+1}^{q} \frac{e^{k\,i\,x}}{k} \right| \le \frac{1}{q \operatorname{sen} \frac{x}{2}} + \frac{1}{p \operatorname{sen} \frac{x}{2}} + \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \sum_{k=p+1}^{q} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{2}{p \operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

La última expresión tiende a cero, cuando $p$ tiende al infinito.

Por el criterio de Cauchy, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{k\,i\,x}}{k}$ converge.