El segundo teorema fundamental de cálculo para funciones absolutamente continuas (un tema de Análisis Real)

Egor Maximenko, Enrique Abdeel Muñoz de la Colina, Elisa Suárez Barraza

http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

8 de julio de 2020

Objetivos.

- Demostrar que si $F \in \mathrm{AC}([a,b])$, entonces $\int_a^b F' \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.
- Demostrar otras propiedades de funciones absolutamente continuas. En particular,

$$\mathrm{AC}([a,b]) = \left\{ F : F(x) = c + \int_a^x f(t)dt, f \in L^1([a,b]) \right\}.$$

Prerrequisitos.

- El lema de Vitali.
- Funciones de variación acotada y sus propiedades básicas.
- Funciones absolutamente continuas y sus propiedades básicas.
- El primer teorema fundamental de cálculo.

Plan

Herramientas auxiliares

- **Definición (cubierta de Vitali de un conjunto)**. Sean $X \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{V} \subset 2^{\mathbb{R}}$. Se dice que $\mathcal{V}$ es una *cubierta de Vitali de* X, si:
    - los elementos de $\mathcal{V}$ son intervalos no triviales, es decir, para cada A en $\mathcal{V}$, A es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $\mu(A) > 0$;
    - para cada x en X y cada $\epsilon > 0$ existe A en $\mathcal{V}$ tal que $x \in A$ y $\mu(A) < \epsilon$.
- **Lema de Vitali sobre cubiertas de Vitali.** Sean $X \subset \mathbb{R}$, $\mu^*(X) < +\infty$, $\mathcal{V}$ una cubierta de Vitali de X, $\epsilon > 0$. Entonces existe una lista finita $A_1, \ldots, A_n$ de elementos de $\mathcal{V}$ tal que $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{V}$ son disjuntos a pares y

$$\mu^*\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) < \epsilon.$$

Herramientas auxiliares

- **Teorema (sobre la derivada de la integral indefinida).** Sea $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. Definimos F en $[a, b]$ mediante la siguiente regla:

  $$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Entonces $F'(x) = f(x)$ para c.t.p. x en $[a, b]$.

Herramientas auxiliares; propiedades de funciones AC.

- **Proposición** (integrales indefinidas de funciones Lebesgue integrables son funciones absolutamente continuas). Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

  Entonces $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

- $\mathrm{AC}([a,b])$ es un espacio vectorial.

Lema sobre la derivada de una función absolutamente continua

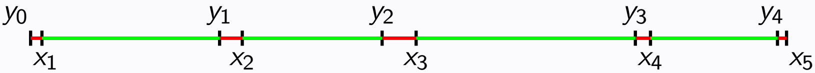
Lema

Sea $F \in \mathrm{AC}([a, b])$. Supongamos que $F' = 0$ c.t.p.

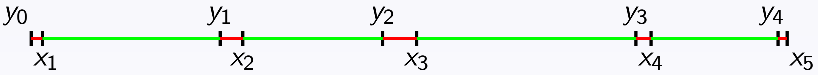
Entonces F es una constante.

Bosquejo de la demostración del lema

- $c \in (a, b]$.
- $F(c) - F(a) = 0$.
- Def. de derivada $\longrightarrow$Cubierta de Vitali$\longrightarrow$Lema de Vitali$\longrightarrow([x_k, y_k])_{k=1}^{m}$.
- $([x_k, y_k])_{k=1}^{m}$, $([y_k, x_{k+1}])_{k=1}^{m}$ colecciones de subintervalos de (a,c).



Bosquejo de la demostración del lema



- $\sum_{k=1}^{m} |F(y_k) - F(x_k)| < \epsilon$ $\longleftarrow$ acotado con ayuda del Lema de Vitali.
- $\sum_{k=1}^{m} |F(y_k) - F(x_{k+1})| < \eta(c - a)$ $\longleftarrow$ acotado con ayuda de la propiedad de F de ser AC .

Inicio de la demostración del lema

Elijamos c en $(a, b]$. Queremos demostrar que $F(c) = F(a)$.
Sea $A \subseteq (a, c)$ tal que $\mu(A) = c - a$ y $F'(x) = 0$ para todo x en A.

Sean $\eta > 0$ arbitrario.
Por la definición de la derivada, y usando el hecho de que $F' = 0$, para todo x en A existe un $\rho_x > 0$ tal que $x + \rho_x < c$ y para cada y en $(x, x + \rho_x)$ se cumple que $\frac{|F(y) - F(x)|}{(y - x)} \leq \eta$.

La siguiente colección es una cubierta de Vitali de A:

$$\mathcal{V} = \{[x, y]\colon\ x \in A,\ y \in (x, x + \rho_x)\}.$$

Pues dados $a \in A$ y $\xi > 0$, basta tomar $v = \min\{\xi, \rho_a\}$, $y = a + \frac{v}{2} \in (a, a + \rho_a)$ para tener $\mu([a, y]) < \xi$.

Continuación de la demostración del lema

Sean $\varepsilon > 0$ arbitrario. Encontramos δ como en la definición de AC.

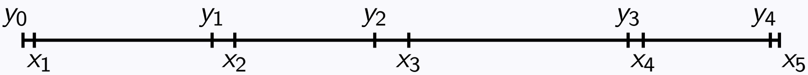
Apliquemos el lema de Vitali con δ y elijamos una lista finita $([x_k, y_k])_{k=1}^m$ de intervalos disjuntos pertenecientes a $\mathcal{V}$, tal que

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^m [x_k, y_k]\right) < \delta.$$

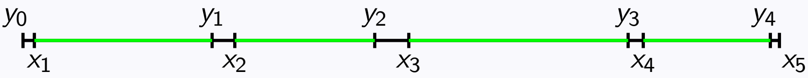
Podemos suponer que $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Pongamos $y_0 = a$, $x_{m+1} = c$. Tenemos $a = y_0 \leq x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_m < y_m \leq x_{m+1} = c$. Entonces

$$\sum_{k=0}^m (x_{k+1} - y_k) = \mu\left([a, c] \setminus \bigcup_{k=1}^m [x_k, y_k]\right) = \mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^m [x_k, y_k]\right) < \delta.$$

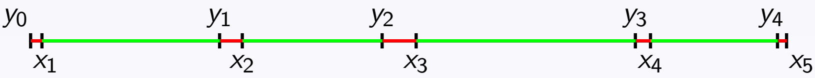
Ejemplo del uso de la continuidad absoluta en la demostración del Lema



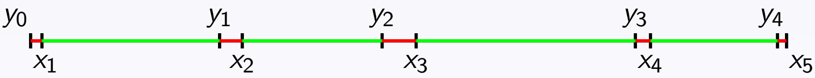
Ejemplo del uso de la continuidad absoluta en la demostración del Lema



Ejemplo del uso de la continuidad absoluta en la demostración del Lema

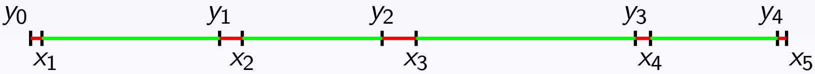


Ejemplo del uso de la continuidad absoluta en la demostración del Lema



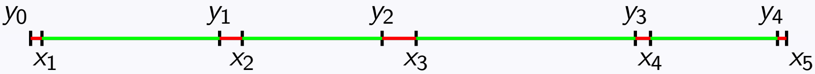
$$|F(c) - F(a)|$$

Ejemplo del uso de la continuidad absoluta en la demostración del Lema



$$
\begin{aligned}
|F(c) - F(a)| = |& - F(y_0) - F(x_1) + F(x_1) - F(y_1) + F(y_1) - F(x_2) + F(x_2) \\
& - F(y_2) + F(y_2) - F(y_3) + F(y_3) - F(x_4) + F(x_4) - F(y_4) + F(y_4) + F(x_5)|
\end{aligned}
$$

Ejemplo del uso de la continuidad absoluta en la demostración del Lema



$$|F(c) - F(a)| \le \sum_{k=0}^{4} |F(x_{k+1}) - F(y_k)| + \sum_{k=1}^{4} |F(y_k) - F(x_k)|$$

Final de la demostración del lema

Como $\sum_{k=0}^{m}(x_{k+1} - y_k) < \delta$, $\sum_{k=0}^{m} |F(x_{k+1}) - F(y_k)| < \varepsilon$.

Por otra parte, de la construcción de $\mathcal{V}$ obtenemos

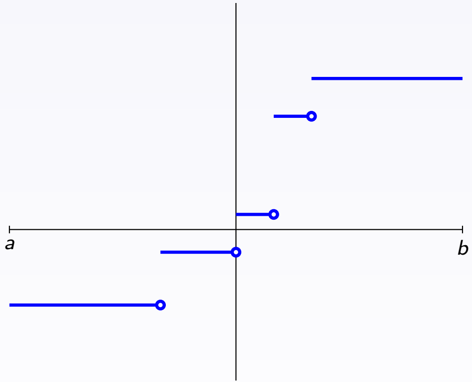
$$\sum_{k=1}^{m} |F(y_k) - F(x_k)| \leq \eta \sum_{k=1}^{m}(y_k - x_k) \leq \eta(c - a).$$

$a = y_0 \leq x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_m < y_m \leq x_{m+1} = c$. Luego

$$|F(c) - F(a)| \leq \sum_{k=0}^{m} |F(x_{k+1}) - F(y_k)| + \sum_{k=1}^{m} |F(y_k) - F(x_k)| \leq \varepsilon + \eta(c - a).$$

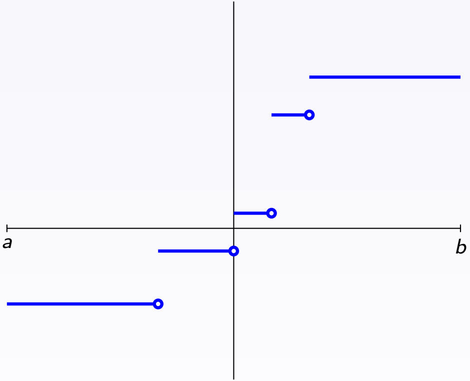
Como ε y η son arbitrarios, $F(c) = F(a)$.

Contraejemplo para funciones de variación acotada



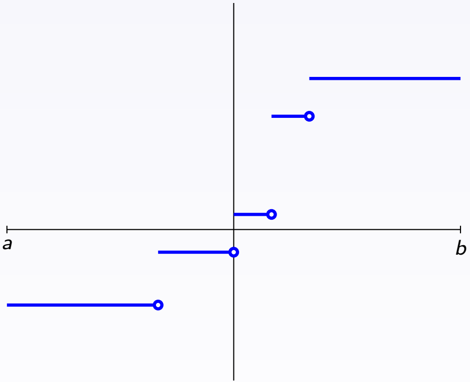
- $f \nearrow$,

Contraejemplo para funciones de variación acotada



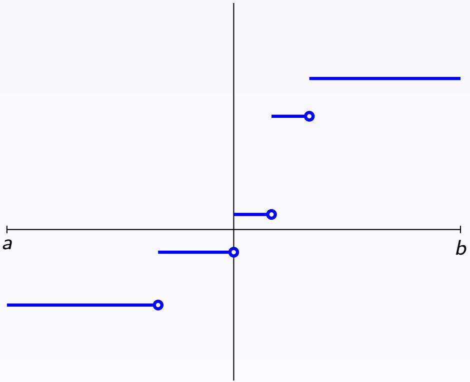
- $f \nearrow$,
- $\mathrm{Var}_a^b(f) = f(b) - f(a) < +\infty$,

Contraejemplo para funciones de variación acotada



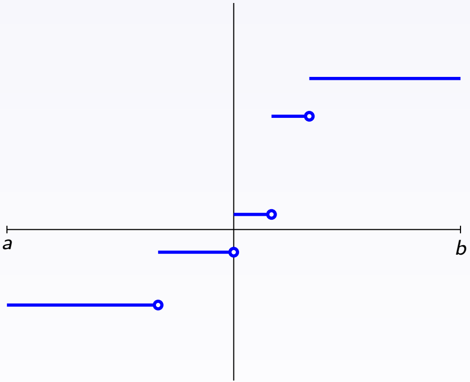
- $f \nearrow$,
- $\mathrm{Var}_a^b(f) = f(b) - f(a) < +\infty$,
- $f \in \mathrm{BV}([a, b])$,

Contraejemplo para funciones de variación acotada



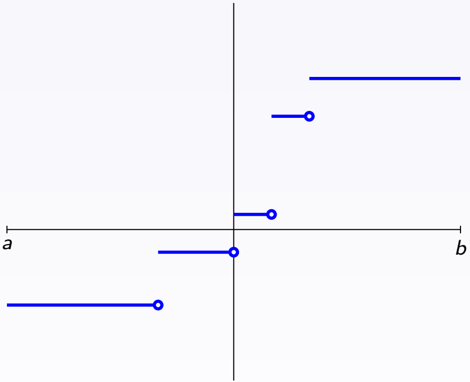
- $f \nearrow$,
- $\mathrm{Var}_a^b(f) = f(b) - f(a) < +\infty$,
- $f \in \mathrm{BV}([a,b])$,
- $f' = 0$,

Contraejemplo para funciones de variación acotada



- $f \nearrow$,
- $\mathrm{Var}_a^b(f) = f(b) - f(a) < +\infty$,
- $f \in \mathrm{BV}([a, b])$,
- $f' = 0$,
- $\int_a^b f' \, \mathrm{d}\mu = 0 \neq f(b) - f(a)$,

Contraejemplo para funciones de variación acotada



- $f \nearrow$,
- $\mathrm{Var}_a^b(f) = f(b) - f(a) < +\infty$,
- $f \in \mathrm{BV}([a, b])$,
- $f' = 0$,
- $\int_a^b f' \, \mathrm{d}\mu = 0 \neq f(b) - f(a)$,
- $f \notin \mathrm{AC}([a, b])$.

Cada función absolutamente continua es la integral de su derivada

Teorema

Sea $F \in \mathrm{AC}([a, b])$. Entonces para cada x en $[a, b]$,

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Este resultado se conoce como una versión general del segundo teorema fundamental de cálculo, o de la regla de Barrow–Newton–Leibniz.

Demostración. Como $F \in \mathrm{BV}([a,b])$, F' existe c.t.p. y $F' \in L^1([a,b])$.

Demostración. Como $F \in \mathrm{BV}([a,b])$, F' existe c.t.p. y $F' \in L^1([a,b])$.

Consideremos

$$G(x) := F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad H := F - G.$$

Demostración. Como $F \in \mathrm{BV}([a,b])$, F' existe c.t.p. y $F' \in L^1([a,b])$.

Consideremos

$$G(x) := F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad H := F - G.$$

Por el primer teorema de cálculo, $G' = F'$ c.t.p.

En otras palabras, $H' = 0$ c.t.p.

Demostración. Como $F \in \mathrm{BV}([a, b])$, F' existe c.t.p. y $F' \in L^1([a, b])$.

Consideremos

$$G(x) := F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad H := F - G.$$

Por el primer teorema de cálculo, $G' = F'$ c.t.p.

En otras palabras, $H' = 0$ c.t.p.

Por otro lado, $G \in \mathrm{AC}([a, b])$ y $H \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Demostración. Como $F \in \mathrm{BV}([a,b])$, F' existe c.t.p. y $F' \in L^1([a,b])$.

Consideremos

$$G(x) := F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad H := F - G.$$

Por el primer teorema de cálculo, $G' = F'$ c.t.p.

En otras palabras, $H' = 0$ c.t.p.

Por otro lado, $G \in \mathrm{AC}([a,b])$ y $H \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Por el Lema, la función H es una constante.

Demostración. Como $F \in \mathrm{BV}([a,b])$, F' existe c.t.p. y $F' \in L^1([a,b])$.

Consideremos

$$G(x) := F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad H := F - G.$$

Por el primer teorema de cálculo, $G' = F'$ c.t.p.

En otras palabras, $H' = 0$ c.t.p.

Por otro lado, $G \in \mathrm{AC}([a,b])$ y $H \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Por el Lema, la función H es una constante.

Para todo x en $[a,b]$ tenemos $H(x) = H(a) = 0$, es decir, $F(x) = G(x)$. $\square$

Criterio de una función absolutamente continua

Proposición

Sea $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $F \in \mathrm{AC}([a, b])$,

(b) existe f en $L^1([a, b], \mathbb{R})$ tal que para cada x en $[a, b]$

$$F(x) = F(a) + \int_a^b f \, \mathrm{d}\mu.$$

Criterio de una función absolutamente continua

Proposición

Sea $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $F \in \mathrm{AC}([a, b])$,

(b) existe f en $L^1([a, b], \mathbb{R})$ tal que para cada x en $[a, b]$

$$F(x) = F(a) + \int_a^b f \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración. (a)⇒(b) por la regla de Barrow–Newton–Leibniz, con $f = F'$.

Criterio de una función absolutamente continua

Proposición

Sea $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $F \in \mathrm{AC}([a,b])$,

(b) existe f en $L^1([a,b],\mathbb{R})$ tal que para cada x en $[a,b]$

$$F(x) = F(a) + \int_a^b f\,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración. (a)⇒(b) por la regla de Barrow–Newton–Leibniz, con $f = F'$.

(b)⇒(a). Sabemos que las integrales indefinidas son AC. □

Fórmula para la variación total de una función absolutamente continua

Ejercicio.

Sea $F \in \mathrm{AC}([a, b])$. Demostrar que

$$\mathrm{Var}_a^b(F) = \int_a^b |F'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Dem(para el caso en que F es creciente):

Si $F \in \mathrm{AC}$ es creciente, entonces $\mathrm{Var}_a^b F = F(b) - F(a)$;Por otro lado $F' > 0$, entonces $F' = |F'|$. luego por el segundo teorema del cálculo

$$\mathrm{Var}_a^b F = F(b) - F(a) = \int_a^b F`(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b |F'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Fórmula para la variación positiva de una función absolutamente continua

Ejercicio.

Sea $F \in \mathrm{AC}([a, b], \mathbb{R})$. Demostrar que

$$\mathrm{PVar}_a^b(F) = \int_a^b P(F'(t))\,\mathrm{d}t,$$

donde

$$P(u) := \begin{cases} u, & u \geq 0; \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

AC([a, b]) es un espacio de Banach

Para cada F en AC([a, b]) pongamos

$$\|F'\| := |F(a)| + \int_a^b |F'| \, \mathrm{d}\mu.$$

Ejercicio simple: verificar que $\|\cdot\|$ es una norma.

Problema. Demostrar que AC([a, b]) con esta norma es completo.

Criterio de función Lipschitz continua en términos de su derivada

Ejercicio. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f \in \operatorname{Lip}([a,b])$,

(b) $f \in \operatorname{AC}([a,b])$ y $f' \in L^\infty([a,b])$.