Ejercicios resueltos de integrales que se calculan con las funciones Gamma, Beta y la fórmula de los complementos (un tema de Análisis Real)

Elisa Suárez Barraza, Paolo Alejandro Balam Aguilar Mata, Luis Alberto De la O Moya

con sugerencias de Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

8 de julio de 2020

Objetivo: Utilizar las funciones Beta y Gamma, la fórmula de complementos y la regla de Leibniz para calcular algunas integrales.

Objetivo: Utilizar las funciones Beta y Gamma, la fórmula de complementos y la regla de Leibniz para calcular algunas integrales.

Prerrequisitos:

- Propiedades principales de las funciones Beta y Gamma de Euler,
- La formula de complementos para la función Gamma,
- Integrales impropias de funciones positivas,
- Cambios de variable en integrales,
- Regla de Leibniz.

Repaso

Definición (función Gamma)

Para $x > 0$,

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Definición (función Beta)

Para $x, y > 0$,

$$\mathrm{B}(x,y) := \int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, \mathrm{d}t.$$

Repaso

Proposición

Para $x, y > 0$,

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, \mathrm{d}u.$$

Proposición (la función Beta como cierta integral de funciones trigonométricas)

Para $x, y > 0$,

$$\mathrm{B}(x,y) = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} (\sin(\vartheta))^{2x-1}(\cos(\vartheta))^{2y-1}\, \mathrm{d}\vartheta. \tag{1}$$

Repaso

Corolario

Para $\alpha, \beta > -1$,

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(\vartheta))^{\alpha} (\cos(\vartheta)^{\beta})\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right). \tag{2}$$

Proposición

Sean $x, y > 0$ entonces

$$\mathrm{B}\,(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

La fórmula de reflexión, i.e. la fórmula de los complementos

Proposición (fórmula de los complementos)

Para $0 < x < 1$,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

En particular, esta fórmula implica que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Ejercicio

Calcular $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Empezar con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Aplicación de la fórmula de los complementos

Proposición

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}}.$$

Tomando Beta de $\frac{p}{q}$ con $1-\frac{p}{q}$ y pasando a su forma como integral de números reales, tenemos que:

$$\mathrm{B}\left(\frac{p}{q}, 1-\frac{p}{q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{p}{q}-1}}{(1+u)}du.$$

Luego, haciendo el cambio de variable $z = u^{\frac{1}{q}}$ nos queda

$$\mathrm{B}\left(\frac{p}{q}, 1-\frac{p}{q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{1+z^q} q dz.$$

Por otro lado, pasando a Beta en su forma en terminos de Gamma, tenemos que

$$\mathrm{B}\left(\frac{p}{q}, 1-\frac{p}{q}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right)}{\Gamma(1)}.$$

Así

$$\int_0^{=\infty} \frac{z^{p-1}}{1-z^q} dz = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{q\sin\left(\frac{p\pi}{q}\right)}.$$

Donde la ultima igualdad se tiene por la fórmula de complementos.

Comparación de la función potencia con la función exponencial y logarítmica

Para cada $\alpha > 0$ existen $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$, $C_3(\alpha) > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0, +\infty) \qquad & x^{\alpha} \leq C_1(\alpha) e^{x}, \\
\forall x \in (0, +\infty) \qquad & \ln(x) \leq C_2(\alpha) x^{\alpha}, \\
\forall x \in (0, 1] \qquad & |\ln(x)| \leq C_3(\alpha) x^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Teorema (La regla de Leibniz para derivar bajo el signo integral)

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, Y un intervalo de $\mathbb{R}$, $f : X \times Y \to \mathbb{C}$.

Suposiciones:

- $\forall\, y \in Y,\;\; f^y \in L^1(X, \mu)$.
- Para casi todo $x \in X$, la función f_x es derivable.
- $\exists\, g \in L^1(X, \mu, [0, +\infty])$ tal que $|f_x'(y)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in X$, $\forall y \in Y$.

Definimos

$$\Phi : Y \to \mathbb{C},\;\; \Phi(y) := \int_X f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x).$$

Entonces para cada $y \in Y$, la función $x \to f_x'(y)$ es integrable, Φ es derivable en Y, y

$$\Phi'(y) = \int_X f_x'(y) d\mu(x).$$

Ejercicio 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Solución. Notemos que la integral anterior se puede expresar en términos de la función Beta y usando los resultados vistos tenemos que:

$$\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1!} = \Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})}$$

Ejercicio 2

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Solución.

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} 1 - x^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x = \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Ejercicio 3

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos^4 x \, \mathrm{d}x.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos^4 x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{4+1}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(5)} \\
&= \frac{1}{(2)(4!)}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{9}{(8)(4!)}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2^6}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2^8}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2^8}
\end{aligned}$$

Lema

Sea

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx,$$

entonces

$$F'(p) = -\frac{\pi^2 \cos \frac{p\pi}{q}}{q^2 \sin^2 \frac{p\pi}{q}}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} \,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \frac{\pi}{q \sin \frac{p}{q}\pi} \\
&= \frac{\pi}{q} \frac{-\left(\cos \frac{p\pi}{q}\right)\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2 \frac{p\pi}{q}} = -\left(\frac{\pi}{q}\right)^2 \frac{\cos \frac{p\pi}{q}}{\sin^2 \frac{p\pi}{q}}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx \qquad (0 < p < 3).$$

Solución: sea

$$f(x,p) = \frac{x^{p-1}}{1+x^3}, \;\; con \;\; 0 < p < 3.$$

Derivando f

$$f_x'(p) = \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x^3}.$$

Definimos

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^3} dx.$$

Debemos encontrar $g \in L^1$ tal que acote a $f_x'(p)$.

Sean $0 < p_1 < p_2 < 3$ fijos tales que $p_1 < p < p_2$, definimos g de la siguiente forma

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^{p_2-1}\ln(x)}{1+x^3} & si \qquad x \geq 1 \\ \\ \frac{x^{p_1-1}\ln(x)}{1+x^3} & si \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Veamos que g acota a f'_x.
Para $0 < x < 1$, $k \mapsto x^k$ es decreciente, entonces si $p_1 - 1 < p - 1$ $(p_1 < p)$ se tiene que $x^{p-1} \leq x^{p_1-1}$. Por lo que se tiene

$$\frac{x^{p-1}\ln(x)}{1+x^3} \leq \frac{x^{p_1-1}\ln(x)}{1+x^3}.$$

Para $x \geq 1$, $k \mapsto x^k$ es creciente, entonces si $p-1 < p_2 - 1$ ($p < p_2$) se tiene que $x^{p-1} \leq x^{p_2-1}$. Por lo que se tiene

$$\frac{x^{p-1}\ln(x)}{1+x^3} \leq \frac{x^{p_2-1}\ln(x)}{1+x^3}.$$

Así, g acota $f_x'(p)$.

Ahora probemos que g es L^1. Para $0 < x < 1$ sabemos que

$$|\ln x| \leq Cx^{-\alpha}, \quad con \quad \alpha > 0.$$

Luego

$$\frac{x^{p_1-1}|\ln(x)|}{1+x^3} \leq \frac{Cx^{p_1-1-\alpha}}{1+x^3} \leq Cx^{p_1-1-\alpha} = \frac{C}{x^{1+\alpha-p_1}}.$$

Es decir

$$\frac{x^{p_1-1}|\ln(x)|}{1+x^3} \leq \frac{C}{x^{1+\alpha-p_1}}.$$

Integrando se tiene

$$\int_0^1 \frac{x^{p_1-1}|\ln(x)|}{1+x^3}dx \leq \int_0^1 \frac{C}{x^{1+\alpha-p_1}}dx.$$

Tomando $\alpha = \frac{p_1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{x^{p_1-1}|\ln(x)|}{1+x^3}dx \leq \int_0^1 \frac{C}{x^{1-\frac{p_1}{2}}}dx.$$

Como $1 - \frac{p_1}{2} < 1$, se tiene que la ultima integral es finita.

Ahora, para $x \geq 1$, sabemos que

$$|\ln x| \leq Cx^{\alpha}, \quad con \quad \alpha > 0.$$

Luego

$$\frac{x^{p_2-1}|\ln(x)|}{1+x^3} \leq \frac{Cx^{p_2+\alpha-1}}{x^3} = \frac{C}{x^{4-\alpha-p_2}}.$$

es decir

$$\frac{x^{p_2-1}|\ln(x)|}{1+x^3} \leq \frac{C}{x^{4-\alpha-p_2}}.$$

Integrando tenemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{p_2-1}|\ln(x)|}{1+x^3} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{C}{x^{4-\alpha-p_2}} dx.$$

Tomando $\alpha = \frac{3-p_2}{2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{p_2-1}|\ln(x)|}{1+x^3} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{C}{x^{\frac{5-p_2}{2}}} dx.$$

Como $\frac{5-p_2}{2} > 1$, se tiene que la ultima integral es finita.
Así, se prueba que g es integrable.

Dado que las condiciones de la regla de Leibniz se cumplen, se tiene que

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x^3} dx.$$

Luego, por el lema anterior y haciendo $p = 2$ y $q = 3$ se tiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1 + x^3} dx = -\frac{\pi^2 \cos \frac{2\pi}{3}}{9 \sin^2 \frac{2\pi}{3}}.$$

Ejercicio 5

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln(x)}{1+x}dx \qquad (0<p<1).$$

Solución: Definimos la siguiente función

$$F(p)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx.$$

Aplicando la proposición con $q=1$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(p\pi)}.$$

Se probará que F cumple con las condiciones para aplicar la regla de Leibniz.

Denotemos:

$$f(x,p) = \frac{x^{p-1}}{1+x},$$

entonces

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \int_0^\infty f(x,p).$$

$$\frac{\partial}{\partial p}f(x,p) = f_x'(p) = \frac{x^{p-1}\ln(x)}{1+x}$$

Debemos encontrar una función $g \in L^1$ que acote $f_x'(p)$.

Sean $0 < p_1 < p_2 < 1$ fijos tales que $p_1 < p < p_2$ definimos g de la siguiente manera

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^{p_2-1}\ln(x)}{1+x} & si \quad x \geq 1 \\ \\ \frac{x^{p_1-1}\ln(x)}{1+x} & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Veamos que $f_x'(p)$ se acota por g.

Para $x \geq 1$, $g(x) = \frac{x^{p_2-1}\ln(x)}{1+x}$, además $k \mapsto x^k$ es creciente, como $p < p_2$ entonces $p - 1 < p_2 - 1$, luego

$$x^{p-1} \leq x^{p_2-1}$$

$$\frac{x^{p-1}\ln(x)}{1+x} \leq g(x)$$

Para $0 < x < 1$, $g(x) = \frac{x^{p_1-1}\ln(x)}{1+x}$, además $k \mapsto x^k$ es decreciente, como $p_1 < p$ entonces $p_1 - 1 < p - 1$, por tanto

$$x^{p-1} \leq x^{p_1-1}$$

luego

$$\frac{x^{p-1}\ln(x)}{1+x} \leq g(x).$$

Hemos probado asi que $f_x'(p)$ se acota por $g(x)$

Probemos que $g \in L^1$.

Supongamos $x \geq 1$, entonces $g(x) = \frac{x^{p_2-2}\ln(x)}{1+x}$, luego

$$\frac{x^{p_2-1}|\ln(x)|}{1+x} \leq \frac{|\ln(x)|}{x^{2-p_2}} \leq \frac{cx^{\alpha}}{x^{2-p_2}}.$$

Tomemos $\alpha = \frac{1-p_2}{2}$, entonces

$$\frac{x^{p_2-1}|\ln(x)|}{1+x} \leq \frac{cx^{\frac{1-p_2}{2}}}{x^{2-p_2}} = \frac{c}{x^{1+\frac{1-p_2}{2}}},$$

donde

$$\int_1^{\infty} \frac{c}{x^{1+\frac{1-p_2}{2}}} < +\infty$$

Supongamos ahora $0 < x < 1$, entonces $g(x) = \frac{x^{p_1-1}\ln(x)}{1+x}$, luego

$$\frac{x^{p_1-1}|\ln(x)|}{1+x} \leq \frac{|\ln(x)|}{x^{1-p_1}} \leq \frac{cx^{-\alpha}}{x^{1-p_1}}.$$

Tomemos $\alpha = \frac{p_1}{2}$, entonces

$$\frac{x^{p_1-1}|\ln(x)|}{1+x} \leq \frac{cx^{-\frac{p_1}{2}}}{x^{1-p_1}} = \frac{c}{x^{1-\frac{p_1}{2}}},$$

donde

$$\int_0^1 \frac{c}{x^{1-\frac{p_1}{2}}} < +\infty$$

Aplicando la regla de Leibniz a F

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\mathrm{sen}(p\pi)}\right) = \frac{d}{dp}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{x^{p-1}}{1+x}\right)dx = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln(x)}{1+x}dx.$$

Es decir

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln(x)}{1+x}dx = \frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\mathrm{sen}(p\pi)}\right) = -\frac{\pi^2\cot(\pi p)}{\mathrm{sen}(\pi p)}.$$