Premedidas

Objetivos. Conocer el concepto de premedida. Mostrar que toda premedida definida en un semianillo se extiende de manera única al anillo generado.

Requisitos. Semianillos, anillos, operaciones con conjuntos.

1 Definición (premedida)**.** Sea X un conjunto y sea $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ tal que $\varnothing \in \mathcal{C}$. Una función $\mu\colon \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ se llama *premedida*, si cumple con las siguientes condiciones:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. Para cada sucesión disjunta de conjuntos $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$, si $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{C}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

La propiedad 2 se puede llamar "la propiedad σ-aditiva condicional".

2 Observación. La definición de premedida parece mucho a la definición de medida, pero cualquier medida está definida en una σ-álgebra $\mathcal{F}$, por eso en la definición de medida la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ automaticamente pertenece a $\mathcal{F}$.

3 Ejercicio. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ tal que $\varnothing \in \mathcal{C}$, y sea $\mu\colon \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ una premedida. Demuestre que μ cumple con la propiedad finita aditiva.

4 Ejemplo (la longitud de semiintervalos es una premedida)**.** Sea $\mathcal{S}$ el semianillo de los semiintervalos de la forma $[a, b)$ del eje real:

$$\mathcal{S} \coloneqq \big\{[a, b)\colon\ a, b \in \mathbb{R}\big\}.$$

Definimos $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ por medio de la siguiente regla:

$$\mu([a, b)) \coloneqq \begin{cases} b - a, & \text{si } a \le b; \\ 0, & \text{si } a > b. \end{cases}$$

En un futuro, demostraremos que μ es una premedida. Una de las ideas claves es la compacidad de los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$.

5 Proposición (extensión de una premedida definida en un semianillo al anillo generado)**.** *Sea $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ un semianillo y sea $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una premedida. Denotemos por $\mathcal{A}$ al anillo generado por $\mathcal{S}$. Entonces existe una única premedida $\mu'\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu'(P) = \mu(P)$ para cada P en $\mathcal{S}$.*

Demostración. Se propone completar todos los detalles en los siguientes razonamientos.

1. Unicidad. Supongamos que μ' y μ'' son dos extensiones de μ. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces existen $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{S}$ disjuntos a pares tales que $A = P_1 \cup \ldots \cup P_m$, y por lo tanto

$$\mu'(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu'(P_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(P_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu''(P_j) = \mu''(A).$$

2. Preparación para definir μ'. Sea $A \in \mathcal{A}$, sean $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{S}$ disjuntos a pares tales que $A = P_1 \cup \ldots \cup P_m$ y sean $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{S}$ disjuntos a pares tales que $A = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$. Consideremos los conjuntos $R_{j,k} \coloneqq P_j \cap Q_k$. Es fácil ver que los conjuntos $R_{j,k} \coloneqq P_j \cap Q_k$ son disjuntos a pares,

$$\mu(P_j) = \sum_{k=1}^{n} \mu(R_{j,k}), \qquad \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^{m} \mu(R_{j,k}),$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mu(P_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mu(R_{j,k}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(R_{j,k}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(Q_k).$$

3. Para cualquier A en $\mathcal{A}$, por la descripción explícita del anillo generado por un semianillo, existen m en $\mathbb{N}$ y $P_1, \ldots, P_m$ en $\mathcal{S}$ tales que $P_1, \ldots, P_m$ son disjuntos a pares y $A = \bigcup_{j=1}^{m} P_j$. Pongamos

$$\mu'(A) \coloneqq \sum_{j=1}^{m} \mu(P_j).$$

   El resultado del inciso anterior muestra que esta definición no depende de la elección de $P_1, \ldots, P_m$.

4. Mostremos que μ' es una extensión de μ. Si $A \in \mathcal{S}$, entonces podemos representar A como

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} P_k,$$

   donde $m = 1$ y $P_1 = A$. Luego

$$\mu'(A) = \sum_{k=1}^{1} \mu(P_k) = \mu(A).$$

5. Como un caso particular del inciso anterior, $\mu'(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

6. Sean $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos disjuntos a pares tal que $B \in \mathcal{A}$, donde

$$B \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

Representamos A_j y B como uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$:

$$A_j = \bigcup_{k=1}^{m_j} P_{j,k}, \qquad B = \bigcup_{s=1}^{n} Q_s.$$

Pongamos

$$R_{j,k,s} \coloneqq P_{j,k} \cap Q_s.$$

Como $\mathcal{S}$ es un semianillo, $R_{j,k,s} \in \mathcal{S}$. Es fácil ver que los conjuntos $R_{j,k,s}$ son disjuntos a pares,

$$P_{j,k} = P_{j,k} \cap B = P_{j,k} \cap \left(\bigcup_{s=1}^{n} Q_s\right) = \bigcup_{s=1}^{n} P_{j,k} \cap Q_s = \bigcup_{s=1}^{n} R_{j,k,s},$$

$$\begin{aligned} Q_s = Q_s \cap B = Q_s \cap \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_s \cap A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_s \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m_j} P_{j,k}\right) \\ = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=1}^{m_j} Q_s \cap P_{j,k} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=1}^{m_j} R_{j,k,s}. \end{aligned}$$

Como μ es una premedida,

$$\mu(P_{j,k}) = \sum_{s=1}^{n} \mu(R_{j,k,s}), \qquad \mu(Q_s) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} \mu(R_{j,k,s}).$$

Finalmente, usamos el hecho que las sumas finitas conmutan con las sumas infinitas (series):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \mu'(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} \mu(P_{j,k}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} \sum_{s=1}^{n} \mu(R_{j,k,s}) \\ = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} \mu(R_{j,k,s}) = \sum_{s=1}^{n} \mu(Q_s) = \mu'(B). \end{aligned}$$

□