Premedidas

Objetivos. Conocer el concepto de premedida. Mostrar que toda premedida definida en un semianillo se extiende de manera única al anillo generado.

Requisitos. Semianillos, anillos, operaciones con conjuntos.

1. Definición (premedida). Sea X un conjunto y sea $\mathcal{C} \subset 2^X$ tal que $\varnothing \in \mathcal{C}$. Una función $\mu\colon \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ se llama *premedida* si cumple con las siguientes condiciones:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.

2. Para toda sucesión de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$, si $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

2. Observación. La definición de premedida parece mucho a la definición de medida, pero toda medida debe estar definida en una σ-álgebra $\mathcal{F}$, por eso en la definición de medida la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ automaticamente pertenece a $\mathcal{F}$.

3. Ejercicio. Una premedida cumple también con la propiedad finita aditiva.

4. Ejemplo (longitud de semiintervalos es una premedida). Sea $\mathcal{S}$ el semianillo de los semiintervalos de la forma $[a, b)$ del eje real:

$$\mathcal{S} := \big\{[a, b)\colon\ \ a, b \in \mathbb{R}\big\}.$$

Definimos $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ por medio de la regla:

$$\mu([a, b)) := \begin{cases} b - a, & \text{si } a \le b; \\ 0, & \text{si } a > b. \end{cases}$$

5. Tarea adicional. Demuestre que μ del ejemplo anterior es una premedida. Use la compacidad de los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$.

6. Proposición (extensión de una premedida definida en un semianillo al anillo generado). Sea $\mathcal{S} \subset 2^X$ un semianillo y sea $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una premedida. Denotemos por $\mathcal{A}$ al anillo generado por $\mathcal{S}$. Entonces existe una única premedida $\mu'\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu'(P) = \mu(P)$ para todo $P \in \mathcal{S}$.

Demostración. Plan de demostración:

1. Unicidad: si μ' y μ'' son dos extensiones y $A \in \mathcal{A}$, entonces existen $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{S}$ disjuntos tales que $A = P_1 \cup \ldots \cup P_m$, y por lo tanto

$$\mu'(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu'(P_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu(P_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu''(P_i) = \mu''(A).$$

2. Sea $A \in \mathcal{A}$, sean $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{S}$ disjuntos tales que $A = P_1 \cup \ldots \cup P_m$ y sean $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{S}$ disjuntos tales que $A = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$. Entonces los conjuntos $R_{i,j} \coloneqq P_i \cap Q_j$ son disjuntos,

$$\mu(P_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu(R_{i,j}), \qquad \mu(Q_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(R_{i,j}),$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(P_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu(R_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} \mu(Q_j).$$

3. Para cualquier $A \in \mathcal{A}$, si $A = \bigcup_{j=1}^{m} P_i$ y $P_1, \ldots, P_m$ son disjuntos, entonces ponemos

$$\mu'(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu(P_i).$$

   El resultado del inciso anterior muestra que esta definición no depende de la elección de $P_1, \ldots, P_m$.

4. $\mu'(\varnothing) = 0$.

5. Sean $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ una sucesión de conjuntos disjuntos tal que $B \coloneqq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$. Representamos A_k y B como uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$:

$$A_k = \bigcup_{i=1}^{m_k} P_{k,i}, \qquad B = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j.$$

   Entonces $R_{k,i,j} \coloneqq P_{k,i} \cap Q_j$ son disjuntos,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu'(A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(P_{k,i}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{n} \mu(R_{k,i,j}) = \sum_{j=1}^{n} \mu(Q_j) = \mu'(B). \qquad \square$$