La longitud de intervalos semiabiertos es una premedida

Estos apuntes están basados en el libro de Halmos, “Measure theory”.

Objetivos. Demostrar que la longitud, considerada como una función en el conjunto de los intervalos de la forma $[a, b)$, es una premedida.

Requisitos. Premedida, intervalos del eje real, compactos, el teorema de Heine–Borel sobre la compacidad de compactos en $\mathbb{R}$.

1 Definición (la longitud de intervalos semiabiertos)**.** Denotamos por $\mathcal{S}$ al conjunto de los intervalos de la forma $[a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Ya sabemos que $\mathcal{S}$ es un semianillo. Consideramos la función $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla

$$\mu([a,b)) := \begin{cases} b-a, & a \le b; \\ 0, & a > b. \end{cases}$$

2 Lema. *Sean $P_1, \ldots, P_n, Q \in \mathcal{S}$ tales que $P_1, \ldots, P_n$ son disjuntos a pares y $P_k \subseteq Q$ para cada k. Entonces,*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \le \mu(Q).$$

Demostración. Los intervalos vacíos tienen longitud 0 y no afectan a la suma en el lado izquierdo. Por eso suponemos que $P_1, \ldots, P_n$ no son vacíos. Para cada k en $\{1, \ldots, n\}$, escribimos P_k como $[a_k, b_k)$, con $a_k < b_k$, y Q como $[c, d)$, con $c < d$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$a_1 < \ldots < a_n.$$

Si para algún k tuvieramos $b_k > a_{k+1}$, entonces el punto a_{k+1} pertenecería a ambos intervalos P_k y P_{k+1}. Concluimos que $b_k \le a_{k+1}$ para cada k. Esto significa que los puntos están ordenados de la siguiente manera:

$$c \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \ldots \le a_n < b_n \le d.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) &= \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \le \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - b_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} b_k = b_n - a_1 \le d - c = \mu(Q). \end{aligned}$$ □

3 Lema. *Sea* $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *una sucesión disjunta en* $\mathcal{S}$ *y sea* $Q \in \mathcal{S}$ *tales que*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} P_j \subseteq Q.$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k) \le \mu(Q).$$

Demostración. Para cada n en $\mathbb{N}$, aplicamos el Lema 2:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \le \mu(Q).$$

Pasamos al límite cuando $n \to \infty$. □

4 Lema. *Sean* $c, d \in \mathbb{R}$ *tales que* $c < d$, *y sea* $\mathcal{A}$ *un conjunto finito de intervalos abiertos acotados en* $\mathbb{R}$ *tal que*

$$[c, d] \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A.$$

Entonces,

$$d - c < \sum_{A\in\mathcal{A}} (\sup(A) - \inf(A)).$$

Demostración. Encontramos un elemento $A_1 = (a_1, b_1)$ de la colección $\mathcal{A}$ tal que $c \in A_1$. Si $b_1 > d$, entonces terminamos el proceso. Si $b_1 \le d$, entonces encontramos un elemento $A_2 = (a_2, b_2)$ de la colección $\mathcal{A}$ tal que $b_1 \in (a_2, b_2)$. Si $b_2 > d$, entonces terminamos el proceso. Si $b_2 \le d$, entonces encontramos un elemento $A_3 = (a_3, b_3)$ de la colección $\mathcal{A}$ tal que $b_2 \in (a_3, b_3)$, etc. En el paso k, si $b_{k-1} \le d$, entonces encontramos $A_k = (a_k, b_k)$ tal que $A_k \in \mathcal{A}$ y $b_{k-1} \in A_k$. De la condición $[c, d] \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ se sigue que mientras el proceso no está terminado, siempre es posible encontrar el siguiente conjunto.

Por otro lado, como $\mathcal{A}$ es finito, el proceso se termina en una cantidad finita de pasos, digamos en n pasos.

Los conjuntos encontrados $A_1, \ldots, A_n$ son de la forma $A_k = (a_k, b_k)$, forman una parte de la colección $\mathcal{A}$ (incluso pueden formar toda la colección $\mathcal{A}$) y cubren $[c, d]$:

$$[c, d] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k).$$

Por la elección de A_1 y A_n,

$$a_1 < c < b_1, \qquad a_n < d < b_n.$$

Más aún, si $n > 1$, entonces para cada k en $\{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que

$$a_{k+1} < b_k < b_{k+1}.$$

Por lo tanto,

$$d - c < b_n - a_1 = (b_1 - a_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \le \sum_{A\in\mathcal{A}} (\sup(A) - \inf(A)). \qquad \square$$

5 Lema. *Sea $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{S}$ y sea Q un elemento de $\mathcal{S}$ tales que*

$$Q \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k.$$

Entonces,

$$\mu(Q) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

Demostración. Escribimos P_k como $[a_k, b_k)$ con $a_k \le b_k$ y Q como $[c, d)$ con $c \le d$. Si $c = d$, entonces la conclusión del lema es trivial. Suponemos $d > c$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < d - c$. Pongamos

$$F_\varepsilon := [a, b - \varepsilon], \qquad U_{k,\varepsilon} := \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k\right).$$

Entonces, $F_\varepsilon \subseteq Q$, $P_k \subseteq U_{k,\varepsilon}$, y

$$F_\varepsilon \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{k,\varepsilon}.$$

Como F_ε es un espacio compacto (el teorema de Heine–Borel), existe un $N(\varepsilon)$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$F_\varepsilon \subseteq \bigcup_{k=1}^{N(\varepsilon)} U_{k,\varepsilon}.$$

Por el lema anterior, obtenemos que

$$b - a - \varepsilon \le \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(b_k - a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right),$$

así que

$$\mu(Q) \le \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \mu(P_k) + 2\varepsilon.$$

Notemos que en esta desigualdad $N(\varepsilon)$ depende de ε, por eso no podemos pasar al límite con $\varepsilon \to 0$. Acotamos la suma finita del lado derecho por la suma de la serie infinita:

$$\mu(Q) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k) + 2\varepsilon.$$

Ahora pasamos al límite cuando ε tiende a cero, y obtenemos la desigualdad requerida. $\square$

6 Teorema. *μ es una premedida sobre $\mathcal{S}$.*

Demostración. Por la definición, $\mu(\varnothing) = \mu([7,7)) = 0$. Mostremos que μ tiene la propiedad σ-aditiva condicional. Suponemos que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta en $\mathcal{S}$ tal que su unión $Q := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$ también pertenece a $\mathcal{S}$. Por el Lema 3, se cumple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k) \le \mu(Q).$$

Por otro lado, por el Lema 5, tenemos la desigualdad inversa. $\square$