

Premedida sobre intervalos semiabiertos

Estos apuntes están basados en el libro de Halmos, “Measure theory”.

Objetivos. Demostrar que la longitud, considerada como una función en el conjunto de los intervalos de la forma $[a, b)$, es una premedida.

Requisitos. Premedida, intervalos del eje real, compactos, el teorema de Heine–Borel sobre la compacidad de compactos en \mathbb{R} .

1. La longitud de intervalos semiabiertos. Denotamos por \mathcal{S} al conjunto de los intervalos de la forma $[a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Ya sabemos que \mathcal{S} es un semianillo. Consideramos la función $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la regla

$$\mu([a, b)) := \begin{cases} b - a, & a \leq b; \\ 0, & a > b. \end{cases}$$

2. Lema. Sean $P_1, \dots, P_n, Q \in \mathcal{S}$ tales que P_1, \dots, P_n son disjuntos a pares y $P_k \subset Q$ para cada k . Entonces

$$\sum_{k=1}^n \mu(P_k) \leq \mu(Q).$$

Demostración. Escribimos P_k como $[a_k, b_k)$, con $a_k \leq b_k$, y Q como $[c, d)$, con $c \leq d$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$a_1 \leq \dots \leq a_n.$$

Entonces las condiciones del lema implican que

$$c \leq a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq d.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mu(P_k) &= \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \leq \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - b_k) \\ &= b_n - a_1 \leq d - c = \mu(Q). \end{aligned} \quad \square$$

3. Lema. Sean $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $c < d$, y sea \mathcal{A} un conjunto finito de intervalos abiertos acotados en \mathbb{R} tal que

$$[c, d] \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Entonces

$$d - c < \sum_{A \in \mathcal{A}} (\sup(A) - \inf(A)).$$

Demostración. Encontramos un elemento $A_1 = (a_1, b_1)$ de la colección \mathcal{A} tal que $c \in A_1$. Si $b_1 > d$, entonces terminamos el proceso. Si $b_1 \leq d$, entonces encontramos un elemento $A_2 = (a_2, b_2)$ de la colección \mathcal{A} tal que $b_1 \in (a_2, b_2)$. Si $b_2 > d$, entonces terminamos el proceso. Si $b_2 \leq d$, entonces encontramos un elemento $A_3 = (a_3, b_3)$ de la colección \mathcal{A} tal que $b_2 \in (a_3, b_3)$, etc. De la condición $[c, d] \subset \bigcup \mathcal{A}$ se sigue que mientras el proceso no está terminado, siempre es posible encontrar el siguiente conjunto. Por otro lado, el proceso se termina en una cantidad finita de pasos, digamos en n pasos. Entonces

$$a_1 < c < b_1, \quad a_n < d < b_n,$$

y si $n > 1$, entonces

$$a_{k+1} < b_k < b_{k+1} \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d - c &< b_n - a_1 = (b_1 - a_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \leq \sum_{A \in \mathcal{A}} (\sup(A) - \inf(A)). \end{aligned} \quad \square$$

4. Lema. Sea $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{S} y sea Q un elemento de \mathcal{S} tales que

$$Q \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k.$$

Entonces

$$\mu(Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

Demostración. Escribimos P_k como $[a_k, b_k)$ con $a_k \leq b_k$ y Q como $[c, d)$ con $c \leq d$. Si $c = d$, entonces la conclusión del lema es trivial. Suponemos $d > c$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < d - c$. Pongamos

$$F_\varepsilon := [a, b - \varepsilon], \quad U_{k,\varepsilon} := \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k \right).$$

Entonces $F_\varepsilon \subset Q$, $P_k \subset U_{k,\varepsilon}$, y

$$F_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{k,\varepsilon}.$$

Como F_ε es un espacio compacto (el teorema de Heine–Borel), existe un $N(\varepsilon)$ en \mathbb{N} tal que

$$F_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{N(\varepsilon)} U_{k,\varepsilon}.$$

Por el lema anterior obtenemos

$$b - a - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(b_k - a_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right),$$

así que

$$\mu(Q) \leq \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \mu(P_k) + 2\varepsilon.$$

Notemos que en esta desigualdad $N(\varepsilon)$ depende de ε , por eso no podemos pasar al límite con $\varepsilon \rightarrow 0$. Acotamos la suma finita del lado derecho por la suma de la serie infinita:

$$\mu(Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k) + 2\varepsilon.$$

Ahora pasamos al límite cuando ε tiende a cero, y obtenemos la desigualdad requerida. \square

5. Teorema. μ es una premedida sobre \mathcal{S} .

Demostración. Por la definición, $\mu(\emptyset) = \mu([7, 7]) = 0$. Mostremos que μ es σ -aditiva. Suponemos que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta en \mathcal{S} tal que su unión Q también pertenece a \mathcal{S} . Por el Lema 2 tenemos que para cada n

$$\sum_{k=1}^n \mu(P_k) \leq \mu(Q),$$

así que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k) \leq \mu(Q).$$

Por otro lado, por el Lema 4 tenemos la desigualdad inversa. \square