Conjunto potencia

1 Definición. Dado un conjunto A, denotemos por $\mathcal{P}(A)$ su *conjunto potencia*:

$$\mathcal{P}(A) \coloneqq \{B\colon\ B \subseteq A\}.$$

2 Proposición. *Sea A un conjunto. Entonces $A \prec \mathcal{P}(A)$.*

Demostración. Definimos $g\colon A \to \mathcal{P}(A)$ mediante la regla $g(x) \coloneqq \{x\}$. Entonces g es inyectiva. En efecto, si $x, y \in A$ y $\{x\} = \{y\}$, entonces $x = y$. □

3 Teorema (teorema de Cantor sobre el conjunto potencia)**.** *Sea A un conjunto. Entonces $A \nsim \mathcal{P}(A)$.*

Demostración. Sea $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ una función. Demostremos que f no es suprayectiva. Pongamos

$$B \coloneqq \{x \in A\colon\ x \notin f(x)\}.$$

Entonces $B \in \mathcal{P}(A)$. Razonando por reducción al absurdo supongamos que f es suprayectiva. Entonces existe a en A tal que $f(a) = B$. Consideremos dos casos.

Caso I: $a \in B$. Entonces por la definición de B tenemos que $a \notin f(a) = B$.

Caso II: $a \notin B$. Entonces por la definición de B tenemos que $a \in f(a) = B$.

En ambos casos llegamos a una contradicción. □

4 Ejemplo. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Definimos $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ mediante la regla

$$f(1) = \{2, 3\}, \qquad f(2) = \{1, 2, 3\}, \qquad f(3) = \{1\}.$$

Entonces $B = \{1, 3\}$, y B no pertenece a la imagen de f.

5 Proposición. *Sean A, B tales que $A \sim B$. Entonces $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.*

Demostración. Sea $f\colon A \to B$ una biyección. Definimos $g\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ y $h\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$,

$$g(C) \coloneqq f[C], \qquad h(D) \coloneqq f^{-1}[D].$$

Entonces $h(g(C)) = C$ y $g(h(D)) = D$. □

6 Proposición. *Para cada n en $\mathbb{N}_0$, $\mathcal{P}(J_n) \sim J_{2^n}$.*

Demostración. Para $n = 0$, $\mathcal{P}(J_0) = \{\varnothing\} \sim J_1$.

Supogamos que $\mathcal{P}(J_n) \sim J_{2^n}$ y que $f\colon J_{2^n} \to \mathcal{P}(J_n)$ es una biyección. Pongamos

$$\begin{aligned} C &\coloneqq \{X \subseteq J_{n+1} : n+1 \notin X\} = \mathcal{P}(J_n), \\ D &\coloneqq \{X \subseteq J_{n+1} : n+1 \in X\} = \mathcal{P}(J_{n+1}) \setminus \mathcal{P}(J_n). \end{aligned}$$

Definimos $g\colon J_{2^n} \to C$ mediante la regla $g(k) \coloneqq f(k)$, y definimos $h\colon J_{2^{n+1}} \setminus J_{2^n} \to D$ mediante la regla $h(k) \coloneqq f(k) \cup \{n+1\}$. Entonces g y h son biyecciones. Definimos

$$u\colon J_{2^{n+1}} \to \mathcal{P}(J_{n+1}), \qquad u(k) \coloneqq \begin{cases} g(k), & k \in J_{2^n}; \\ h(k), & k \in J_{2^{n+1}} \setminus J_{2^n}. \end{cases}$$

Por la proposición sobre la unión disjunta de dos biyecciones, u es una biyección. Luego $J_{2^{n+1}} \sim \mathcal{P}(J_{n+1})$. $\square$

7 Corolario. *Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y sea A un conjunto tal que $A \sim J_n$. Entonces $\mathcal{P}(A) \sim J_{2^n}$.*

8 Proposición. *Para cada n en $\mathbb{N}_0$, $n < 2^n$.*

Demostración. Para $n = 0$, tenemos que $0 < 1 = 2^0$.

Para $n = 1$, tenemos que $1 < 2 = 2^1$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y $n < 2^n$. Entonces

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n = n + n \geq n + 1. \qquad \square$$