Series de números positivos, un repaso breve

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

28 de febrero de 2023

Plan

Objetivos

- Recordar algunas propiedades “malas” de series de números reales.
- Recordar algunas propiedades “buenas” de series de números positivos.

Prerrequisitos

- Convergencia de series.
- Sucesiones crecientes de números.

La sucesión de las sumas parciales de una sucesión

Sea $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

La sucesión de las sumas parciales de una sucesión

Sea $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Denotamos por s la sucesión de las sumas parciales:

$$s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} a_k \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

La sucesión de las sumas parciales de una sucesión

Sea $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Denotamos por s la sucesión de las sumas parciales:

$$s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} a_k \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Usaremos esta notación en todo este tema.

Definición de la convergencia de series

Definición

Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, si existe b en $\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} s_m = b.$$

En este caso se escribe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b$.

Plan

Ejemplo de serie que no converge de manera absoluta

Sea

$$a_k := \frac{(-1)^k}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ejemplo de serie que no converge de manera absoluta

Sea

$$a_k := \frac{(-1)^k}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Ejemplo de serie que no converge de manera absoluta

Sea

$$a_k := \frac{(-1)^k}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Demostrar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Demostrar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ no converge.

Ejemplo de serie no convergente cuyas sumas parciales son acotadas

Sea

$$a_k := (-1)^k.$$

Ejemplo de serie no convergente cuyas sumas parciales son acotadas

Sea

$$a_k := (-1)^k.$$

Calcular s_m para cada m en $\mathbb{N}$.

Ejemplo de serie no convergente cuyas sumas parciales son acotadas

Sea

$$a_k := (-1)^k.$$

Calcular s_m para cada m en $\mathbb{N}$.

Mostrar que la sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Ejemplo de serie no convergente cuyas sumas parciales son acotadas

Sea

$$a_k := (-1)^k.$$

Calcular s_m para cada m en $\mathbb{N}$.

Mostrar que la sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Mostrar que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ no converge.

Una permutación de los sumandos puede convertir una serie convergente en una serie no convergente

Construir $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y una biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, pero la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ no converge.

Una permutación de los sumandos puede convertir una serie convergente en una serie no convergente

Construir $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y una biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, pero la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ no converge.

Una idea posible:

$$a_k := \frac{(-1)^k}{k}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 9 & 11 & 6 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Una permutación de los sumandos puede cambiar la suma de la serie

Construir $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y una biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que las series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ convergen, pero sus sumas no coinciden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \neq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

Una permutación de los sumandos puede cambiar la suma de la serie

Construir $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y una biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que las series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ convergen, pero sus sumas no coinciden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \neq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

Una idea posible:

$$a_k := \frac{(-1)^k}{k}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Una serie de números no nulos con suma cero

Construir $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k \neq 0,$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad s_m \neq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0.$$

Plan

Las sumas parciales de una serie de números no negativos

Ahora supongamos que $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$.

Las sumas parciales de una serie de números no negativos

Ahora supongamos que $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Entonces la situación se simplifica mucho.

Las sumas parciales de una serie de números no negativos

Ahora supongamos que $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Entonces la situación se simplifica mucho.

Se recomienda recordar demostraciones de los siguientes resultados.

Las sumas parciales de una serie de números no negativos

Ahora supongamos que $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Entonces la situación se simplifica mucho.

Se recomienda recordar demostraciones de los siguientes resultados.

Proposición

La sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente: $\forall m \in \mathbb{N} \qquad s_{m+1} \geq s_m.$

Las sumas parciales de una serie de números no negativos

Ahora supongamos que $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Entonces la situación se simplifica mucho.

Se recomienda recordar demostraciones de los siguientes resultados.

Proposición

La sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente: $\forall m \in \mathbb{N} \qquad s_{m+1} \geq s_m.$

Proposición

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \sup_{m\in\mathbb{N}} s_m.$$

Las sumas parciales de una serie de números no negativos

Ahora supongamos que $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Entonces la situación se simplifica mucho.

Se recomienda recordar demostraciones de los siguientes resultados.

Proposición

La sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente: $\forall m \in \mathbb{N} \qquad s_{m+1} \geq s_m.$

Proposición

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \sup_{m\in\mathbb{N}} s_m.$$

Este límite puede ser finito o infinito, y en ambos casos se denota por $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

La suma de una serie de números no negativos

Si $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$, entonces siempre existe la suma de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} a_k = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} a_k .$$

La suma de una serie de números no negativos

Si $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$, entonces siempre existe la suma de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$, entonces se dice que la serie converge.

La suma de una serie de números no negativos

Si $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$, entonces siempre existe la suma de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} a_k = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} a_k .$$

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$, entonces se dice que la serie converge.

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, entonces se dice que la serie diverge.

Criterio de convergencia de una serie de números no negativos

Proposición

Sea $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Entonces son equivalentes:

(a) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge;

(b) la sucesión $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es acotada.

Criterio de convergencia de una serie de números no negativos

Proposición

Sea $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Entonces son equivalentes:

(a) la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge;

(b) la sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Notemos que en muchas situaciones es más fácil encontrar una cota superior para $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que calcular el límite de esta sucesión.

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m =$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2}$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} <$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)}$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} =$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{m+1}$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{m+1} <$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{m+1} < 1.$$

Ejemplo

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Acotemos las sumas parciales por arriba:

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{m+1} < 1.$$

De aquí se sigue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < 1.$$

Las sumas parciales se acotan por la suma de la serie

Proposición

Sea $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$s_m \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Las sumas parciales se acotan por la suma de la serie

Proposición

Sea $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$s_m \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

En efecto, $s_m \leq \lim_{n\to\infty} s_n$ porque la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

La suma de una serie permutada de números no negativos

Proposición

Sea $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$ y sea $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

Ambos lados pueden ser finitos o infinitos.

Comparación de dos series de números no negativos

Proposición

Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty)$ tales que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k \leq b_k.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

En particular, si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$.

¿Cuándo la suma de una serie de números no negativos es cero?

Proposición

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0.$$

Entonces $a_k = 0$ para cada k en $\mathbb{N}$.