Series de números no negativos, repaso de sus propiedades principales

Objetivos. Repasar las propiedades principales de series de números no negativos.

Prerrequisitos. Convergencia de series, sucesiones crecientes de números.

Series de números reales

Sea $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Denotamos por $s = (s_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la sucesión de las sumas parciales:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, si existe b en $\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} s_m = b.$$

En este caso se escribe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b$.

Las series de números reales tienen varias propiedades "malas" o "complicadas". Se recomienda construir ejemplos para mostrar estas propiedades.

1 Ejercicio. Construir $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, pero $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ no converge.

2 Ejercicio. Construir $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada, pero $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ no converge.

3 Ejercicio. Construir $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y una biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, pero la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ no converge.

4 Ejercicio. Construir $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y una biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ convergen, pero sus sumas no coinciden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \neq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

5 Ejercicio. Construir $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k \neq 0,$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad s_m \neq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0.$$

Series de números no negativos

Ahora supongamos que $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Entonces la situación se simplifica mucho. Se recomienda recordar demostraciones de los siguientes resultados.

6 Proposición. *La sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente (en el sentido no estricto), y*

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \sup_{m\in\mathbb{N}} s_m. \tag{1}$$

El límite (1) puede ser finito o infinito, y en ambos casos se denota por $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. En otras palabras, la suma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ siempre está definida, pero puede ser igual a $+\infty$.

7 Proposición. *La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si, y sólo si, la sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada.*

Notemos que en muchas situaciones es más fácil encontrar una cota superior para $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que calcular el límite de esta sucesión.

La siguiente afirmación es un corolario trivial de la Proposición 6.

8 Proposición. *Para cada m en $\mathbb{N}$,*

$$s_m \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

9 Proposición. *Sea $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

Ambos lados pueden ser finitos o infinitos.

10 Proposición. *Sean* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0,+\infty)$ *tales que*

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k \le b_k.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

En particular, si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$*, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$*.*

11 Proposición. *Sea* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0,+\infty)^{\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0.$$

Entonces $a_k = 0$ *para cada* k *en* $\mathbb{N}$*.*