La identidad de polarización con 4 sumandos para las formas sesquilineales

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo. Dada una forma sesquilineal $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$, le asociamos la forma cuadrática $q_f\colon V \to \mathbb{C}$,

$$q_f(x) \coloneqq f(x,x).$$

Ya hemos estudiado algunas propiedades elementales de q_f.

Objetivos. Mostrar que f se expresa en términos de q_f. Como una consecuencia, podremos concluir que la correspondencia $f \mapsto q_f$ es inyectiva.

Prerrequisitos. Formas sesquilineales (= funciones sesquilineales), la forma cuadrática asociada a la forma sesquilineal, raíces complejas de la unidad, la suma de la progresión geométrica.

1 Lema (sobre las sumas de potencias de i)**.** *Sea $p \in \{0,1,2,3\}$. Entonces*

$$\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{pk} = \begin{cases} 4, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Primera demostración. El cálculo directo para cada p. □

Segunda demostración. Aplicar la fórmula de la suma de la progresión geométrica. □

Hay varias identidades que expresan f en términos de q_f. La más conocida y probablemente la más cómoda es la siguiente fórmula con 4 sumandos.

2 Proposición (la identidad de polarización con 4 sumandos para las formas sesquilineales)**.** *Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces*

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b). \tag{1}$$

Demostración. Para cada k en $\{0,1,2,3\}$ tenemos

$$q_f(a + \mathrm{i}^k\, b) = f(a + \mathrm{i}^k\, b, a + \mathrm{i}^k\, b) = q_f(a) - \mathrm{i}^k\, f(a,b) + \mathrm{i}^k\, f(b,a) + q_f(b).$$

Multiplicamos por i^k:

$$\mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b) = \mathrm{i}^k\, q_f(a) + f(a,b) + \mathrm{i}^{2k}\, f(b,a) + \mathrm{i}^k\, q_f(b).$$

Sumamos ambos lados de esta igualded sobre k en $\{0,1,2,3\}$. Aplicando el Lema 1 obtenemos (1). $\square$

3 Proposición (la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva)**.** *Sean $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ y $g\colon V^2 \to \mathbb{C}$ formas sesquilineales tales que $q_f = q_g$, esto es,*

$$\forall x \in V \qquad f(x,x) = g(x,x).$$

Entonces $f = g$, esto es,

$$\forall x, y \in V \qquad f(x,y) = g(x,y).$$

Demostración. Se sigue de la identidad (1). $\square$