

Identidades de polarización para las formas sesquilineales

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo. Dada una forma sesquilineal $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$, le asociamos la forma cuadrática $q_f: V \rightarrow \mathbb{C}$,

$$q_f(x) := f(x, x).$$

Ya hemos estudiado algunas propiedades elementales de q_f .

Objetivos. Mostrar que f se expresa en términos de q_f . Como una consecuencia, podremos concluir que la correspondencia $f \mapsto q_f$ es inyectiva.

Prerrequisitos. Formas sesquilineales (= funciones sesquilineales), la forma cuadrática asociada a la forma sesquilineal, raíces complejas de la unidad, la suma de la progresión geométrica.

Sumas de las raíces complejas de uno

1 Lema. Sea $p \in \{0, 1, 2, 3\}$. Entonces

$$\sum_{k=0}^3 i^{pk} = \begin{cases} 4, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Primera demostración. El cálculo directo para cada p . □

Segunda demostración. Aplicar la fórmula de la suma de la progresión geométrica. □

Dado m en \mathbb{N} , usemos la siguiente notación:

$$\varepsilon_m := \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right).$$

2 Ejercicio (las potencias de una raíz primitiva de la unidad). Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, y sea $r \in \mathbb{Z}$. Demostrar que

$$\varepsilon_m^r = 1 \quad \iff \quad r \in m\mathbb{Z}.$$

La condición $r \in m\mathbb{Z}$ significa que m divide a r .

3 Ejercicio (las sumas de las potencias de una raíz primitiva de la unidad). Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, y sea $p \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^{pk} = \begin{cases} m, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1, \dots, m-1\}. \end{cases}$$

Identidades de polarización para formas sesquilineales

Hay varias identidades que expresan f en términos de q . La más conocida y probablemente la más cómoda es la siguiente fórmula con 4 sumandos.

4 Proposición (la identidad de polarización para las formas sesquilineales). Sea $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a, b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k q_f(a + i^k b). \quad (1)$$

Demostración. Para cada k en $\{0, 1, 2, 3\}$ tenemos

$$q_f(a + i^k b) = f(a + i^k b, a + i^k b) = q_f(a) - i^k f(a, b) + i^k f(b, a) + q_f(b).$$

Multiplicamos por i^k :

$$i^k q_f(a + i^k b) = i^k q_f(a) + f(a, b) + i^{2k} f(b, a) + i^k q_f(b).$$

Sumamos ambos lados de esta igualdad sobre k en $\{0, 1, 2, 3\}$. Aplicando el Lema 1 obtenemos (1). \square

5 Proposición (la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva). Sean $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$ y $g: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$ formas sesquilineales tales que $q_f = q_g$, esto es,

$$\forall x \in V \quad f(x, x) = g(x, x).$$

Entonces $f = g$, esto es,

$$\forall x, y \in V \quad f(x, y) = g(x, y).$$

Demostración. Se sigue de la identidad (1). \square

6 Ejercicio (la identidad de polarización con m sumandos). Sea $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q la forma cuadrática asociada a f :

$$q(x) := f(x, x).$$

Sean $a, b \in V$. Demostrar que

$$f(a, b) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^k q(a + \varepsilon_m^k b).$$