Convergencia puntual de las series de Fourier

Dada una función f de clase $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, denotamos por $\widehat{f}$ a la sucesión de sus coeficientes de Fourier:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x.$$

Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotamos por $S_n f$ a la n-ésima suma parcial de Fourier:

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x.$$

Ya hemos demostrado que

$$S_n f = D_n * f,$$

donde $*$ es la convolución cíclica y D_n es núcleo de Dirichlet:

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k+1)x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

Usando la primera fórmula para D_n, es fácil ver que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x)\, \mathrm{d}x = 1. \tag{1}$$

Además, hemos verificado que

$$\left| \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right| \le \frac{\pi^2}{24} \qquad \left(0 < |x| \le \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Lema 1. *Sea $[\alpha, \beta]$ un subintervalo de $[0, \pi]$ y sea $g \in L^1([\alpha, \beta])$. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta g(y) \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) y\right)\, \mathrm{d}y = 0.$$

Demostración. Denotemos por J_n a la integral que estamos considerando, dividida entre 2π. Extendemos g con cero a $[0, \pi]$, luego extendemos g de manera impar a $[-\pi, \pi]$, luego de manera 2π-periódica a $\mathbb{R}$. Después de esta extensión, la función por debajo de la integral es par, y la integral J_n se puede escribir como

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)y}}{2\,\mathrm{i}}\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4\,\mathrm{i}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y/2}\, \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,y}\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,y/2}\, \mathrm{e}^{-n\,\mathrm{i}\,y}\, \mathrm{d}y \right).
\end{aligned}$$

Las últimas dos integrales se pueden escribir como coeficientes de Fourier, con índices $-n$ y n, de ciertas funciones integrales, luego por el lema de Riemann–Lebesgue estas integrales tienden a cero cuando n tiende a infinito. $\square$

Teorema 2 (criterio de convergencia de la serie de Fourier en un punto)**.** *Sean* $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *existe* δ *en* $(0, \pi)$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta (f(x+y) + f(x-y) - 2A) \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{y}\,\mathrm{d}y = 0. \tag{3}$$

(b) $(S_n f)(x) \to A$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. 1. Utilizamos la definición de $f * D_n$, partimos el dominio de integración en $[0, \pi]$ y $[-\pi, 0]$, en la parte $[-\pi, 0]$ hacemos un cambio de variable y usamos el hecho que la función D_n es par:

$$\begin{aligned}(S_n f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-y)D_n(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x-y)D_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+y)+f(x-y))D_n(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Por la paridad de D_n, la igualdad (1) se puede escribir en la forma

$$\frac{2}{2\pi}\int_0^\pi D_n(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Por eso la diferencia $(S_n f)(x) - A$ se escribe en la siguiente forma:

$$(S_f f)(x) - A = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+y)+f(x-y)-2A)\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\operatorname{sen}\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

2. La función auxiliar

$$g(y) = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(y/2)} - \frac{2}{y}\right)(f(x+y)+f(x-y)-2A)\,\mathrm{d}y$$

es integrable en $[0, \pi]$, luego por el lema

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(y)\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Esto significa que $(S_n f)(x)$ tiende al número A si y solamente si,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi (f(x+y)+f(x-y)-2A)\,\mathrm{sen}\,\frac{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{y}\,\mathrm{d}y = 0. \tag{5}$$

3. Sea $\delta > 0$. La función

$$h(y) \coloneqq \frac{f(x+y)+f(x-y)-2A}{y}$$

es integrable en $[\delta, \pi]$, luego por el lema

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi h(y)\,\mathrm{sen}\,\frac{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{y}\,\mathrm{d}y = 0,$$

y la condición (5) es equivalente a la condición (3). $\square$

Teorema 3 (Dini). *Supongamos que $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}$, y*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+y)+f(x-y)-2A|}{y}\,\mathrm{d}y < +\infty. \tag{6}$$

Entonces $(S_n f)(x) \to A$ cuando $n \to \infty$.

Corolario 4. *Supongamos que $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1]$, y f satisface la condición simétrica de Hölder en el punto x, en la forma*

$$|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)| \le C|y|^\alpha.$$

Entonces $(S_n f)(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$.

Corolario 5. *Supongamos que f es 2π-periódica y continuamente derivable. Entonces en cada punto x de $\mathbb{R}$, $(S_n f)(x) \to f(x)$.*