Convergencia puntual

Sean X, Y espacios métricos.

Definición (convergencia en un punto). Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $X \to Y$, $x_0 \in X$. Dicen que $\{f_n\}$ *converge en el punto* x_0 si la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ converge.

Definición (conjunto de convergencia). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $X \to Y$. El conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que f_n converge en x, se llama el *conjunto de convergencia de la sucesión* f_n.

Definición (función límite). Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $X \to Y$, E el conjunto de convergencia de la sucesión $\{f_n\}$. La función $g\colon E \to Y$, definida por

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E),$$

se llama *función límite de la sucesión* $\{f_n\}$.

Definición (convergencia puntual). Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $X \to Y$, $g\colon E \to Y$ una función, donde $E \subset X$. Dicen que f_n *converge a* g *(puntualmente) en el conjunto* E si $f_n(x) \to g(x)$ para todo $x \in E$.

1. Ejemplo. $X = [0,1]$, $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Calcular el conjunto de convergencia y la función límite de la sucesión $\{f_n\}$. ¿Es la función límite continua?

2. Ejemplo. $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}$. Calcular el conjunto de convergencia y la función límite g de la sucesión $\{f_n\}$. Checar si $f_n' \to g'$.
(Este ejemplo es más complicado que los demás.)

3. Ejemplo. $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$. Calcular el conjunto de convergencia y la función límite g de la sucesión $\{f_n\}$. Checar si $f_n' \to g'$.

4. Ejemplo. $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Calcular el conjunto de convergencia y la función límite g de la sucesión $\{f_n\}$. Calcular $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ y $\int_0^1 g(x)\,dx$.

5. Ejemplo. Para $m, n \in \mathbb{N}$, pongamos:

$$f_m(x) := \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}.$$

Mostrar que

$$f_m(x) = \begin{cases} 1, & m!x \in \mathbb{Z}; \\ 0, & m!x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Mostrar que para todo $x \in X$ se tiene $f_m(x) \to \mathcal{D}(x)$, donde $\mathcal{D}$ es la función de Dirichlet:

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q}; \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$