Convolución periódica

Objetivos. Introducir el concepto de convolución de funciones 2π-periódicas y demostrar las propiedades principales de esta operación.

Requisitos. Funciones Lebesgue integrables, funciones periódicas, teorema de Fubini, cambio de variable.

Funciones 2π-periódicas

Definición 1 (función T-periódica)**.** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función y sea $T \in \mathbb{R}$. Se dice que f es T-periódica (también se dice que T es un período de f) si para cada x en $\mathbb{R}$

$$f(x+T) = f(x).$$

Definición 2 (los períodos de una función)**.** Una función puede tener varios períodos. Por ejemplo, si T es un período de f, entonces $2T$ también es un período de f:

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x).$$

Más general, si T es un período de f, entonces cualquier múltiplo positivo de T también es un período de f. Si f es una constante, entonces cualquier número real es su período. Se puede demostrar que el conjunto de los períodos de una función dada es un subgrupo de $\mathbb{R}$.

Definición 3 (el período positivo mínimo de una función)**.** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función. Supongamos que el conjunto de los períodos positivos de f tiene un elemento mínimo T. Entonces se dice que T es el *período positivo mínimo* de f. Se puede demostrar que en esta situación cualquier período positivo de f es un múltiplo entero de T. Hay funciones que no tienen período positivo mínimo.

Definición 4 (el grupo cociente $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$)**.** Sea $T > 0$. Los elementos de $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$ son conjuntos de la forma $x + T\mathbb{Z}$, con x en $\mathbb{R}$. La suma de dos elementos de $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$ se puede definir como la suma de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, es decir, como el conjunto de todas las sumas:

$$A + B \coloneqq \Big\{ c \in \mathbb{R}: \quad \exists a \in A \quad \exists b \in A \quad c = a + b \Big\}.$$

Es fácil ver que si $A, B \in \mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$, $x \in A$, $y \in B$, entonces

$$A + B = (x+y) + T\mathbb{Z}.$$

La función $x + T\mathbb{Z} \to \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, x/T}$ es un isomorfismo del grupo $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$ sobre el grupo $\mathbb{T}$.

Observación 5 (varios puntos de vista a las funciones 2π-periódicas)**.** En estos apuntes vamos a trabajar con funciones 2π-periódicas. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función 2π-periódica, entonces existe una única función $g\colon (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})) \to \mathbb{C}$ tal que $g(x+2\pi\mathbb{Z}) = f(x)$ para cada x en $\mathbb{R}$. También existe una única función $h\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tal que $h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}) = f(x)$ para cada x en $\mathbb{R}$. Más aún, si f es continua, las funciones g y h también son continuas. Esto significa que en vez de trabajar con funciones 2π-periódicas es posible trabajar con funciones definidas en el grupo cociente $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ o en la circunferencia unitaria $\mathbb{T}$. En estos apuntes elegimos el punto de vista más elemental y trabajamos con funciones 2π-periódicas definidas en $\mathbb{R}$.

Definición 6 (funciones 2π-periódicas integrables sobre intervalos de longitud 2π)**.** Sea $p \in [1, +\infty]$. Denotamos por $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ a las clases de equivalencia de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son Lebesgue-medibles, 2π-periódicas y p-integrables sobre el intervalo $[0, 2\pi)$.

Convolución periódica

Definición 7 (la convolución periódica de dos funciones periódicas integrables)**.** Dadas dos funciones $f, g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, denotamos por $f * g$ su *convolución periódica* (también llamada la *convolución cíclica*):

$$(f * g)(\vartheta) \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\vartheta - \eta) g(\eta)\,\mathrm{d}\mu(\eta). \tag{1}$$

Lema 8. *Sean $f, g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces,*

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\vartheta - \eta) g(\eta)|\,\mathrm{d}\mu(\eta)\,\mathrm{d}\mu(\vartheta) \;=\; \|f\|_{L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})}\, \|g\|_{L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})}.$$

Proposición 9 (la convolución periódica de dos funciones periódicas integrables es integrable y periódica)**.** *Sean $f, g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces, $f * g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, y*

$$\|f * g\|_{L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})} \;\le\; \|f\|_{L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})}\, \|g\|_{L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})}.$$

Proposición 10 (propiedad asociativa de la convolución periódica)**.**

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Proposición 11 (propiedad conmutativa de la convolución periódica)**.**

$$f * g = g * f.$$

Proposición 12 (teorema de convolución para la convolución periódica)**.** *Sean $f, g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces,*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(f * g) = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(f) \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(g).$$

En otras palabras, si $h = f * g$, entonces para cada k en $\mathbb{Z}$ se cumple que

$$\widehat{h}_k = \widehat{f}_k \widehat{g}_k.$$

Ejercicio 13. Demuestre la propiedad asociativa y conmutativa de $*$ usando el teorema de convolución y la propiedad inyectiva de la transformación $f \mapsto \widehat{f}$.

Ejercicio 14. Demuestre que en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ no existe elemento neutro bajo la operación $*$. Sugerencia: utilice el teorema de Riemann–Lebesgue.