Núcleos aproximativos periódicos

Objetivos. Introducir el concepto de núcleos aproximativos (núcleos buenos, sucesiones de Dirac) sobre el grupo $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Demostrar que el núcleo de Fejér $(\Phi_n)_{n=0}^{\infty}$ es un núcleo aproximativo. Demostrar que los núcleos aproximativos sirven para aproximar funciones continuas en el sentido uniforme.

Requisitos. El núcleo de Fejér, convolución periódica (cíclica).

Convolución periódica (repaso breve)

Definición 1 (funciones 2π-periódicas, repaso breve)**.** En este tema trabajamos con aquellas funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son 2π-periódicas y satisfacen algunas propiedades adicionales (continuas, medibles, integrables sobre un intervalo, etc.). Es posible pensar que el dominio de estas funciones es el grupo cociente $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ o la circunferencia unitaria $\mathbb{T}$. También, en vez de trabajar con funciones 2π-periódicas, es posible trabajar con funciones 1-periódicas o funciones cuyo dominio es el grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Definición 2 (funciones 2π-periódicas integrables sobre intervalos de longitud 2π, repaso breve)**.** Denotamos por $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ a las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son Lebesgue-medibles y 2π-periódicas, y además son Lebesgue integrables sobre el intervalo $[0, 2\pi)$. Pasamos libremente de las funciones a sus clases de equivalencia. La norma en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ está definida como

$$\|f\|_{1,2\pi} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\vartheta)| \, \mathrm{d}\mu(\vartheta),$$

donde μ es la medida de Lebesgue. Es fácil ver que la norma no sambia al pasar del intervalo $[0, 2\pi)$ a cualquier otro intervalo de longitud 2π. De manera similar se definen las clases *Lpper* para cualquier $p \in [1, +\infty]$; en el caso $p = +\infty$ se trata de funciones esencialmente acotadas, y la norma se define a través del supremo esencial con respecto a la medida μ.

Definición 3 (la convolución 2π-periódica, repaso breve)**.** Dadas dos funciones f, g de clase $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, su *convolución periódica* (o cíclica) se define mediante la regla

$$(f * g)(\vartheta) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta - \eta) g(\eta) \, \mathrm{d}\mu(\eta). \tag{1}$$

Es fácil ver que $f * g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $\|f * g\|_{1,2\pi} \leqslant \|f\|_{1,2\pi} \|g\|_{1,2\pi}$. La integral (1) se puede escribir de otra manera equivalente, utilizando solamente los valores de f y g en puntos del intervalo $[0, 2\pi)$:

$$(f * g)(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,\vartheta)} f(\vartheta - \eta) g(\eta) \, \mathrm{d}\mu(\eta) + \frac{1}{2\pi} \int_{[\vartheta,2\pi)} f(\vartheta - \eta + 2\pi) g(\eta) \, \mathrm{d}\mu(\eta). \tag{2}$$

En la fórmula (2) se puede suponer que $\vartheta \in [0, 2\pi)$, luego $f * g$ se extiende al dominio $\mathbb{R}$ por la 2π-periodicidad. La convolución periódica también se puede definir para otras clases de funciones f y g, cuando la integral (1) converge absolutamente para casi todos puntos ϑ en $\mathbb{R}$.

Núcleos aproximativos (2π-periódicos)

Definición 4 (núcleo aproximativo)**.** Una sucesión de funciones $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ se llama *núcleo aproximativo* de funciones 2π-periódicas, si las funciones K_n están definidas en $\mathbb{R}$, son 2π-periódicas, y se satisfacen las siguientes propiedades:

(NA1) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \|K_n\|_{1,2\pi} < +\infty$.

(NA2) Para cada n en $\mathbb{N}_0$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} K_n \,\mathrm{d}\mu = 1$.

(NA3) Para cada $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(\delta,2\pi-\delta)} |K_n| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Definición 5 (sucesión de Dirac)**.** Una *sucesión de Dirac* (en el sentido de Serge Lang) es núcleo aproximativo $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tal que $K_n(\vartheta) \geqslant 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada $\vartheta \in \mathbb{R}$. Obviamente, en este caso la condición (NA1) es un corolario de (NA2).

El núcleo de Fejér es un núcleo aproximativo

Proposición 6 (varias fórmulas equivalentes para el núcleo de Fejér, repaso breve)**.** *Así llamamos la sucesión de funciones $(\Phi_n)_{n=0}^{\infty}$ definidas mediante las siguientes fórmulas equivalentes:*

$$\Phi_n(\vartheta) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\vartheta} = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\vartheta} \tag{3}$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(k\vartheta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(k\vartheta) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{\operatorname{sen} \dfrac{n\vartheta}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\vartheta}{2}} \right)^2 . \tag{5}$$

Proposición 7 (una cota inferior para la función sen cerca del punto cero, repaso breve)**.** *Hemos mostrado anteriormente que para cada x en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*

$$\operatorname{sen}(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\, x. \tag{6}$$

Teorema 8 (el núcleo de Fejer es un núcleo aproximativo)**.** *La sucesión $(\Phi_n)_{n=0}^{\infty}$ definida mediante (3) es una sucesión de Dirac y por lo tanto es un núcleo aproximativo.*

Demostración. De la forma (5) es obvio que $\Phi_n(\vartheta) \geqslant 0$ para cada n y ϑ. De la forma (3) es fácil deducir que para cada n en $\mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_n(\vartheta) \,\mathrm{d}\mu(\vartheta) = 1.$$

Verifiquemos la propiedad (NA3). Primero notamos que si $\delta \in (0, \pi)$ y $\vartheta \in [\delta, \pi]$, entonces $\vartheta/2 \in [\delta/2, \pi/2]$ y por la desigualdad (6)

$$\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2} \geqslant \frac{\vartheta}{\pi}. \tag{7}$$

Ahora acotamos $\Phi_n(\vartheta)$ por arriba usando (5) y (7):

$$|\Phi_n(\vartheta)| \leqslant \frac{1}{n\left(\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{n\vartheta^2} \leqslant \frac{\pi^2}{n\delta^2}.$$

La misma cota superior es cierta para ϑ en $[\pi, 2\pi - \delta]$, por la 2π-periodicidad y paridad de Φ_n. Luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[\delta,2\pi-\delta]} \Phi_n(\vartheta)\,\mathrm{d}\mu(\vartheta) \leqslant \frac{\pi}{2n\delta^2},$$

y la última expresión obviamente tiende a 0 cuando n tiende a ∞. $\square$

Aproximación uniforme por medio de la convolución periódica con el núcleo aproximativo periódico

Proposición 9 (criterio de continuidad uniforme en términos módulo de continuidad uniforme, repaso)**.** *Sea* (X, d) *un espacio métrico y sea* $f : X \to \mathbb{C}$*. Definimos* $\omega_f : (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ *como*

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(u) - f(v)| : \ u, v \in X, \ d(u, v) \leqslant \delta\}.$$

Entonces f *es uniformemente continua en* X *si, y solo si,* $\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

Teorema 10 (sobre la aproximación uniforme por medio de la convolución periódica con eel núcleo aproximativo periódico)**.** *Sea* $f \in C_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$ *y sea* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *un núcleo aproximativo. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |(K_n * f)(x) - f(x)| = 0.$$

Demostración. Notemos que la función f es continua en $[-2\pi, 4\pi]$. Como $[-2\pi, 4\pi]$ es un compacto, f es uniformemente continua en $[-2\pi, 4\pi]$. Denotemos su módulo de continuidad uniforme por ω_f. Además, f es acotada en este segmento. Denotemos su supremo por $\|f\|_{\sup}$.

Transformamos la diferencia $(K_n * f)(x) - f(x)$ usando la propiedad (NA2):

$$\begin{aligned}(K_n * f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x - y)K_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y) - \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x - y) - f(x))K_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y).\end{aligned}$$

Dado δ en $(0,\pi)$, partimos el conjunto de integración en las partes $[0,\delta)\cup(2\pi-\delta,2\pi]$ y $[\delta,2\pi-\delta]$ y partimos las integrales de manera correspondiente:

$$\begin{aligned}|(K_n * f)(x) - f(x)| \leqslant{}& \frac{1}{2\pi}\int_{[0,\delta)\cup(\delta,2\pi-\delta]} |f(x-y)-f(x)|\,|K_n(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{[\delta,2\pi-\delta]} |f(x-y)-f(y)|\,|K_n(y)|\,\mathrm{d}\mu(y).\end{aligned}$$

En la primera integral usamos la desigualdada $|(x-y)-x| = |y| \leqslant \delta$ y el módulo de continuidad uniforme de f. En la segunda integral acotamos $|f(x-y)-f(y)|$ por $2\|f\|_{\sup}$.

$$\begin{aligned}|(K_n * f)(x) - f(x)| \leqslant{}& \omega_f(\delta)\frac{1}{2\pi}\int_{[0,\delta)\cup(\delta,2\pi-\delta]} |K_n(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &+ 2\|f\|_{\sup}\frac{1}{2\pi}\int_{[\delta,2\pi-\delta]} |K_n(y)|\,\mathrm{d}\mu(y).\end{aligned}$$

Luego

$$\|K_n * f - f\|_{\sup} \leqslant \omega_f(\delta)\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\|K_n\|_{1,2\pi} + 2\|f\|_{\sup}\frac{1}{2\pi}\int_{[\delta,2\pi-\delta]} |K_n(y)|\,\mathrm{d}\mu(y). \tag{8}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la condición (NA1) y el hecho que $\omega_f(\delta)$ tiende a cero cuando δ tiende a cero, elegimos un δ en $(0,\pi)$ de tal manera que

$$\omega_f(\delta)\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\|K_n\|_{1,2\pi} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para este δ aplicamos la condición (NA3) y encontramos k en $\mathbb{N}_0$ tal que para cada n en $\mathbb{N}_0$ con $n \geqslant k$ se cumple

$$2\|f\|_{\sup}\frac{1}{2\pi}\int_{[\delta,2\pi-\delta]} |K_n(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego para $n \geqslant k$ por (8) obtenemos $\|K_n * f - f\|_{\sup} < \varepsilon$. □

Aplicación a la aproximación uniforme de funciones continuas por medio de polinomios trigonométricos

Proposición 11. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\|\widehat{S}_n(f) - f\|_{\sup} = 0.$$

Demostración. En efecto, $\widehat{S}_n(f) = \Phi_n * f$, donde $(\Phi_n)_{n=0}^{\infty}$ es el núcleo de Fejér, y ya sabemos que el núcleo de Fejér es un núcleo aproximativo. □

Corolario 12. *El conjunto de los polinomios trigonométricos es denso en $C_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$.*

Demostración. En efecto, para cada n en $\mathbb{N}_0$ la función $\widehat{S}_n(f)$ es un polinomio trigonométrico. □