# El núcleo de Poisson periódico

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

11 de enero de 2021

# Objetivo

Conocer dos familias de funciones de clase $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$:

- $(P_r)_{0\le r<1}$, llamada el núcleo de Poisson periódico,

$$P_r(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos(kx) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2},$$

- $(Q_r)_{0\le r<1}$, llamada el núcleo de Poisson periódico conjugado,

$$Q_r(x) = -\,\mathrm{i}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\operatorname{sgn}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\operatorname{sen}(kx) = \frac{2r\operatorname{sen}(x)}{1-2r\cos(x)+r^2}.$$

Estas funciones están relacionadas con funciones armónicas en el disco unitario.

Empezamos con fórmulas para ciertas series trigonométricas.

## Proposición

Para cada $r$ en $[0,1)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \frac{1}{1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}},$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \frac{1 - r\cos(x)}{1 + r^2 - 2r\cos(x)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(kx) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\operatorname{sgn}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \frac{r\operatorname{sen}(x)}{1 + r^2 - 2r\cos(x)}.$$

Aquí usamos el convenio que $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

# Demostración

Recordemos la fórmula para la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

# Demostración

Recordemos la fórmula para la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

Sustituyendo $q = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ obtenemos

$$f_r(x) := \sum_{k=0}^{\infty} r^k\,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \frac{1}{1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}.$$

# Demostración

Recordemos la fórmula para la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad (|q|<1).$$

Sustituyendo $q = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ obtenemos

$$f_r(x) := \sum_{k=0}^{\infty} r^k\,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \frac{1}{1-r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}.$$

Multiplicamos el numerador y el denominador por el denominador conjugado:

$$f_r(x) = \frac{1-r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{(1-r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})(1-r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x})} = \frac{1-r\cos(x)+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}(x)}{1-2r\cos(x)+r^2}$$

# Demostración

Hemos mostrado que

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \frac{1 - r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2} + \mathrm{i}\, \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}.$$

# Demostración

Hemos mostrado que

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \, e^{k \, i \, x} = \frac{1 - r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2} + i \, \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}.$$

Por otro lado,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \, e^{i \, kx} = \left(1 + \sum_{k=1} r^k \cos(kx)\right) + i \left(\sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(kx)\right).$$

# Demostración

Hemos mostrado que

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \frac{1 - r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2} + \mathrm{i}\,\frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}.$$

Por otro lado,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \left(1 + \sum_{k=1} r^k \cos(kx)\right) + \mathrm{i}\left(\sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(kx)\right).$$

Igualamos las partes reales y las partes imaginarias:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kx) = \frac{1 - r\cos(x)}{1 + r^2 - 2r\cos(x)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(kx) = \frac{r\operatorname{sen}(x)}{1 + r^2 - 2r\cos(x)}.$$

# Demostración

Finalmente, expresamos $\sum_{k=1}^{\infty}$ en términos de $\sum_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$
\begin{aligned}
1+\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kx) &= 1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(r^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}+r^k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx},\\
\sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(kx) &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(r^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}-r^k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\right)=-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\operatorname{sgn}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}.
\end{aligned}
$$

# El núcleo de Poisson periódico

Para cada $r$ en $[0,1)$, definimos $P_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$P_r(x) \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,.$$

Otra forma equivalente:

$$P_r(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kx).$$

## Proposición (la fórmula explícita para $P_r$)

Para cada $r$ en $[0,1)$ y cada $x$ en $\mathbb{R}$,

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}.$$

# Demostración

Ya sabemos que

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos(kx)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}=\frac{1-r\cos(x)}{1+r^2-2r\cos(x)},$$

Multiplicamos ambos lados por 2, luego restamos 1:

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos(kx)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}=\frac{2-2r\cos(x)}{1+r^2-2r\cos(x)}-1.$$

Al simplificar, obtenemos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}=1+2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos(kx)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}.$$

# El núcleo de Poisson periódico conjugado

Para cada $r$ en $[0,1)$, definimos $Q_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$Q_r(x) := -\mathrm{i} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \operatorname{sgn}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,.$$

Otra forma equivalente:

$$Q_r(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(kx).$$

**Proposición (la fórmula explícita para $Q_r$)**

Para cada $r$ en $[0,1)$ y cada $x$ en $\mathbb{R}$,

$$Q_r(x) = \frac{2r\operatorname{sen}(x)}{1+r^2-2r\cos(x)}.$$

# Demostración

Ya sabemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(kx) = -\frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \operatorname{sgn}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \frac{r\operatorname{sen}(x)}{1 + r^2 - 2r\cos(x)}.$$

Multiplicamos ambos lados por 2:

$$2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(kx) = -\,\mathrm{i} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \operatorname{sgn}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \frac{2r\operatorname{sen}(x)}{1 + r^2 - 2r\cos(x)}.$$

# Los coeficientes de Fourier de $P_r$

Hemos definido $P_r$ como

$$P_r(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{r,k}\, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}, \qquad a_{r,k} := r^{|k|}.$$

# Los coeficientes de Fourier de $P_r$

Hemos definido $P_r$ como

$$P_r(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{r,k}\,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}, \qquad a_{r,k} := r^{|k|}.$$

Como la sucesión $(a_{r,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ es de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$, concluimos que

$$\widehat{(P_r)}_k = a_{r,k} = r^{|k|}.$$

# Los coeficientes de Fourier de $P_r$

Hemos definido $P_r$ como

$$P_r(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{r,k}\, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}, \qquad a_{r,k} := r^{|k|}.$$

Como la sucesión $(a_{r,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ es de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$, concluimos que

$$\widehat{(P_r)}_k = a_{r,k} = r^{|k|}.$$

En otras palabras,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x = r^{|k|}.$$

**Ejercicio.** Demostrar esta fórmula de manera directa, usando el análisis complejo (el cambio de variable $t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ y el teorema sobre los residuos).

# Los coeficientes de Fourier de $Q_r$

Encontrar los coeficientes de Fourier de $Q_r$ de dos maneras:

- usando la definición de $Q_r$ como la suma de cierta serie;
- usando herramientas de análisis complejo.

# Algunas propiedades de $P_r$

## Proposición

Sea $r \in [0,1)$. Entonces la función $P_r$ es de clase $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$,

es par, es estrictamente decreciente en $[0,\pi]$,

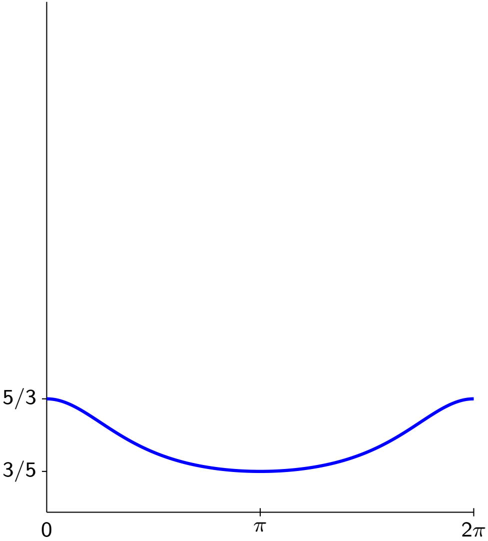
$$\min_{x\in\mathbb{R}} P_r(x) = P_r(\pi) = \frac{1-r}{1+r}, \qquad \max_{x\in\mathbb{R}} P_r(x) = P_r(0) = \frac{1+r}{1-r}.$$

En particular, los valores de $P_r$ son estrictamente positivos.

El promedio de $P_r$ en $[0,2\pi]$ es 1:

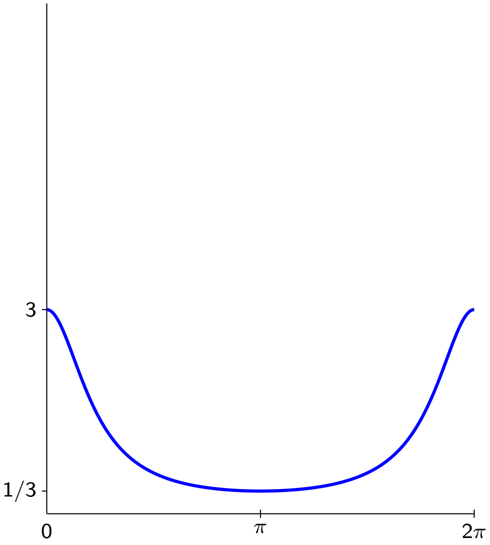
$$\|P_r\|_{1,2\pi\text{-per}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

# La gráfica de $P_r$ en $[0, 2\pi]$



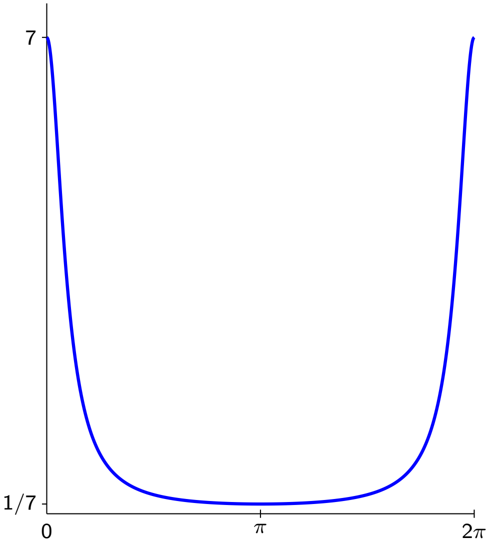

$r = 1/4$

# La gráfica de $P_r$ en $[0, 2\pi]$




$r = 1/2$

# La gráfica de $P_r$ en $[0, 2\pi]$




$r = 3/4$