El núcleo de Poisson periódico

En este tema consideramos dos familias de funciones de clase $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, conocidas como el núcleo de Poisson 2π-periódico y el núcleo de Poisson conjugado 2π-periódico. Estas funciones están relacionadas con funciones armónicas en el disco unitario.

En otra unidad del curso se consideran otras dos familias de funciones, también conocidas como el núcleo de Poisson y el núcleo de Poisson conjugado, pero no periódicas; esas dos familias están relacionadas con funciones armónicas en el semiplano superior.

Proposición 1. *Para cada r en $[0,1)$,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \operatorname{e}^{\operatorname{i} k\vartheta} = \frac{1}{1 - r \operatorname{e}^{\operatorname{i}\vartheta}}, \tag{1}$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k\vartheta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \operatorname{e}^{\operatorname{i} k\vartheta} = \frac{1 - r\cos(\vartheta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta)}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(k\vartheta) = -\frac{\operatorname{i}}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \operatorname{sgn}(k) \operatorname{e}^{\operatorname{i} k\vartheta} = \frac{r\operatorname{sen}(\vartheta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta)}. \tag{3}$$

Aquí usamos el convenio que $\operatorname{sgn}(0) = 0$*.*

Demostración. Recordemos la fórmula para la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Sustituyendo $q = r\operatorname{e}^{\operatorname{i}\vartheta}$ obtenemos (1). Ahora vamos a separar la parte real e imaginaria. Por un lado,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \operatorname{e}^{\operatorname{i} k\vartheta} = \left(1 + \sum_{k=1} r^k \cos(k\vartheta)\right) + \operatorname{i}\left(\sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(k\vartheta)\right).$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{1 - r\operatorname{e}^{\operatorname{i}\vartheta}} = \frac{1 - r\operatorname{e}^{-\operatorname{i}\vartheta}}{(1 - r\operatorname{e}^{\operatorname{i}\vartheta})(1 - r\operatorname{e}^{-\operatorname{i}\vartheta})} = \frac{1 - r\cos(\vartheta) + \operatorname{i}\operatorname{sen}(\vartheta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta)}.$$

Hemos demostrado la igualdad entre los lados extremos en las igualdades (2) y (3). Ahora transformamos las sumas para obtener los lados intermedios.

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k\vartheta) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(r^k \operatorname{e}^{\operatorname{i} k\vartheta} + r^k \operatorname{e}^{-\operatorname{i} k\vartheta}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \operatorname{e}^{\operatorname{i} k\vartheta},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \operatorname{sen}(k\vartheta) = \frac{1}{2\operatorname{i}}\sum_{k=1}^{\infty}(r^k \operatorname{e}^{\operatorname{i} k\vartheta} - r^k \operatorname{e}^{-\operatorname{i} k\vartheta}) = -\frac{\operatorname{i}}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \operatorname{sgn}(k) \operatorname{e}^{\operatorname{i} k\vartheta}. \qquad \square$$

Definición 2 (el núcleo de Poisson y el núcleo de Poisson conjugado como series de potencias)**.** Para cada r en $[0,1)$, definimos $P_r, Q_r\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mediante la reglas

$$P_r(\vartheta) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\vartheta}, \tag{4}$$

$$Q_r(\vartheta) := -\,\mathrm{i}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\,\mathrm{sgn}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\vartheta}\,. \tag{5}$$

Proposición 3 (fórmulas explícitas para el núcleo de Poisson y el núcleo de Poisson conjugado)**.**

$$P_r(\vartheta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta)}, \tag{6}$$

$$Q_r(\vartheta) = \frac{2r\,\mathrm{sen}(\vartheta)}{1+r^2-2r\,\mathrm{sen}(\vartheta)}. \tag{7}$$

Demostración. Despejamos la suma de la serie (4) de la identidad (2):

$$P_r(\vartheta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\vartheta} = \frac{2(1-r\cos(\vartheta))}{1+r^2-2r\cos(\vartheta)} - 1 = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta)}.$$

Despejamos la suma de la serie (5) de la identidad (3):

$$Q_r(\vartheta) = -\,\mathrm{i}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\,\mathrm{sgn}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\vartheta} = \frac{2r\,\mathrm{sen}(\vartheta)}{1+r^2-2r\cos(\vartheta)}. \qquad \square$$

Proposición 4 (algunas propiedades del núcleo de Poisson periódico)**.** *Sea $r\in[0,1)$. Entonces la función P_r es de clase $C_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$, es par, es estrictamente decreciente en $[0,\pi]$,*

$$\min_{\vartheta\in\mathbb{R}} P_r(\vartheta) = P_r(\pi) = \frac{1-r}{1+r}, \qquad \max_{\vartheta\in\mathbb{R}} P_r(\vartheta) = P_r(0) = \frac{1+r}{1-r}.$$

En particular, los valores de P_r son estrictamente positivos. El promedio de P_r en $[0,2\pi]$ es 1:

$$\|P_r\|_{1,2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\vartheta)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Demostración. Notamos que en el segmento $[0,\pi]$ la función $\vartheta\mapsto\cos(\vartheta)$ es estrictamente decreciente, la función $\vartheta\mapsto 1+r^2-2\cos(\vartheta)$ es estrictmante creciente, y la función P_r es estrictamente decreciente. Como la serie de Fourier (4) converge de manera absoluta y uniforme, sus coeficientes se pueden recuperar como coeficientes de Fourier. En particular, el 0-ésimo coeficiente de Fourier de P_r es 1. $\square$