Medidas exteriores

Objetivos. Definir el concepto axiomático de medida exterior. Mostrar que cada premedida definida en un anillo genera a una medida exterior.

Requisitos. Medidas, anillos, semianillos, premedidas.

1. Definición (medida exterior). Sea X un conjunto. Una función $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ se llama *medida exterior* sobre X si cumple con las siguientes condiciones:

1. $\varphi(\varnothing) = 0$.
2. Monotonía: si $A, B \in 2^X$ y $A \subset B$, entonces $\varphi(A) \le \varphi(B)$.
3. Subaditividad numerable (contable): si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en 2^X, entonces
$$\varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n).$$

2. Observación. Notemos dos diferencias entre los conceptos de medida y medida exterior. Por un lado, toda medida exterior debe estar definida en todos los subconjunos de X, y una medida puede estar definida solamente en elementos de una σ-álgebra. Por otro lado, en la definición de medida se pide la propiedad σ-aditiva, y en la definición de medida exterior solamente la propiedad σ-subaditiva.

3. Ejemplo. Sea X un conjunto. Definimos $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ mediante la siguiente regla:
$$\varphi(A) := \begin{cases} 0, & \text{si } A = \varnothing; \\ 1, & \text{si } A \neq \varnothing. \end{cases}$$
Entonces φ es una medida exterior sobre X. Si X tiene más de un elemento, entonces φ no es una medida.

4. Cualquier medida exterior es finitamente subaditiva. Sean $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ una medida exterior, $m \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_m \in 2^X$. Demuestre que
$$\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \le \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_m).$$

5. Criterio de medida exterior. Sea $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ una función tal que $\varphi(\varnothing) = 0$. Demuestre que el sistema de las condiciones 2 y 3 de la definición de medida exterior es equivalente a la siguiente condición 3':

3' Para toda sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X$ y todo conjunto $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$,
$$\varphi(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(B_n).$$

Medida exterior generada por una premedida

6. Definición ($\mathcal{A}$-cubierta de Y). Sean $\mathcal{A} \subset 2^X$, $Y \subset X$. Una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama $\mathcal{A}$-*cubierta* de Y si $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $Y \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

7. Teorema (de la medida exterior generada por una premedida). Sean $\mathcal{A} \subset 2^X$ un anillo de conjuntos y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una premedida. Definimos $\mu^*\colon 2^X \to [0, +\infty]$ mediante la siguiente regla:

$$\mu^*(Y) \coloneqq \inf\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\colon \quad (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \quad Y \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right\} \qquad (Y \subset X),$$

Entonces μ^* es una medida exterior y $\mu^*(A) = \mu(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Esta medida exterior μ^* se llama la *medida exterior generada por* μ.

8. Observación. Para algunos subconjuntos Y de X puede suceder que no existe ninguna sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ tal que $Y \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En estos casos $\mu^*(Y) = \inf \varnothing = +\infty$.

Demostración.

1. Demostremos que $\mu^*(\varnothing) = 0$. La sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $A_n \coloneqq \varnothing$, es una $\mathcal{A}$-cubierta del conjunto $\varnothing$, por tanto

$$\mu^*(\varnothing) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0.$$

   Por otro lado, todas las sumas que participan en la definición de μ^* son no negativas, así que $\mu^*(\varnothing) = 0$.

2. Demostremos la propiedad monótona. Sean $Y \subset Z \subset X$. Notamos que cualquier $\mathcal{A}$-cubierta de Z es una $\mathcal{A}$-cubierta de Y, por lo tanto

$$\mu^*(Y) \le \mu^*(Z).$$

3. Demostremos la propiedad subaditiva. Sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Denotemos por Z su unión:

$$Z \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n.$$

   Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. De la definición de $\mu^*(Y_n)$ se sigue que existen conjuntos $A_{n,k} \in \mathcal{A}$ tales que

$$Y_n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,k}) \le \mu^*(Y_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Entonces $(A_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{A}$-cubierta numerable de Z y por lo tanto

$$\mu^*(Z) \le \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,k}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(Y_n) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario,

$$\mu^*(Z) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(Y_n).$$

4. Sea $Y \in \mathcal{A}$. Mostremos que $\mu^*(Y) \le \mu(Y)$. En efecto, consideremos la siguiente sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$A_n \coloneqq \begin{cases} Y, & n = 0; \\ \varnothing, & n \in \{1, 2, \ldots\}. \end{cases}$$

Entonces $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{A}$-cubierta de Y y por lo tanto

$$\mu^*(Y) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(Y).$$

5. Sea $Y \in \mathcal{A}$. Mostremos que $\mu(Y) \le \mu^*(Y)$. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una $\mathcal{A}$-cubierta de Y. Definimos las sucesiones $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$C_k \coloneqq Y \cap \left(\bigcup_{n\le k} A_n \right), \qquad D_0 \coloneqq C_0, \qquad D_k \coloneqq C_k \setminus C_{k-1} \quad (k \ge 1).$$

Entonces $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta, y

$$Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

Además para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $C_k \in \mathcal{A}$, $D_k \in \mathcal{A}$ y $D_k \subset A_k$. Siendo una premedida en $\mathcal{A}$, μ tiene propiedad monótona. Por lo tanto

$$\mu(D_k) \le \mu(A_k).$$

Aplicamos esta desigualdad y la propiedad σ-aditiva de μ:

$$\mu(Y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(D_k) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Como la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{A}$-cubierta arbitraria de Y, $\mu(Y) \le \mu^*(Y)$. $\square$