Conjuntos de vectores ortonormales

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert, esto es, un espacio vectorial complejo con producto interno, completo respecto a la métrica inducida por el producto interno.

Objetivos. Estudiar propiedades de conjuntos ortonormales en H y establecer un criterio de base ortonormal (aquí tratamos bases como conjuntos).

Prerrequisitos. Sucesiones ortonormales de vectores, la suma de una familia.

La suma de una familia (repaso)

1 Definición (la suma de una familia de vectores)**.** Sean $\mathcal{A}$ un conjunto, H un espacio de Hilbert, $\{g_a\colon\ a \in \mathcal{A}\}$ una familia en H y $h \in H$. Denotemos por $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})$ al conjunto de los subconjuntos finitos de $\mathcal{A}$, dirigido por la relación $\supseteq$. Para cada A en $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})$ pongamos $S_A := \sum_{a\in A} g_a$. Decimos que la suma $\sum (g_a)_{a\in\mathcal{A}}$ converge a h si la red $(S_A)_{A\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})}$ converge a h.

2 Proposición. *Si $J = \mathbb{N}$ y $\sum(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a h, entonces $\sum_{j\in\mathbb{N}} g_j$ converge a h.*

3 Proposición. *Sea $(g_a)_{a\in\mathcal{A}}$ una familia en $[0, +\infty)$ tal que*

$$\sup_{A\in J} \sum_{a\in A} g_a = h < +\infty.$$

Entonces

$$\sum (g_a)_{a\in\mathcal{A}} = h$$

y el conjunto $\{a \in \mathcal{A}\colon\ g_a > 0\}$ es numerable.

Conjuntos ortogonales y ortonormales de vectores

4 Definición (conjunto ortonormal)**.** Un subconjunto $\mathcal{A}$ de H se llama *ortonormal* si para cada a en $\mathcal{A}$ se tiene $\|a\| = 1$, y para cualesquiera a, b en $\mathcal{A}$, si $a \neq b$, entonces $a \perp b$.

5 Definición (familia ortogonal)**.** Una familia $(g_a)_{a\in\mathcal{A}}$ en H se llama *ortogonal* si para cualesquiera a, b en $\mathcal{A}$ con $a \neq b$ se tiene $g_a \perp g_b$.

6 Proposición (desigualdad de Bessel para conjuntos ortonormales finitos)**.** *Sea m en $\mathbb{N}$ y sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortonormal en H y sea v un elemento de H. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{m} |\langle v, a_j \rangle|^2 \le \|v\|^2.$$

7 Proposición (desigualdad de Bessel para conjuntos ortonormales)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto ortonormal en H y sea v un elemento de H. Entonces el conjunto $\{a \in \mathcal{A}\colon\ \langle v, a \rangle \neq 0\}$ es numerable, y*

$$\sum (|\langle v, a \rangle|^2)_{a \in \mathcal{A}} \le \|v\|^2.$$

Demostración. Para cada A en $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})$, por la Proposición 6, tenemos

$$\sum_{a \in A} |\langle v, a \rangle|^2 \le \|v\|^2.$$

Pongamos

$$M := \sup_{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})} \sum_{a \in A} |\langle v, a \rangle|^2.$$

Entonces $M \le \|v\|^2$. En particular, $M < +\infty$. Aplicando la Proposición 3 obtenemos ambas conclusiones que teníamos por demostrar. $\square$

8 Proposición (sobre la suma de una familia ortogonal de vectores)**.** *Sea $(g_a)_{a \in \mathcal{A}}$ una familia ortogonal en H tal que*

$$M := \sup_{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})} \sum_{a \in A} \|g_a\|^2 < +\infty. \tag{1}$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

1. *La suma $\sum (g_a)_{a \in \mathcal{A}}$ converge a un elemento h de H.*

2. *El conjunto $\{a \in \mathcal{A}\colon\ g_a \neq 0_H\}$ es numerable.*

3. *Si $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ es una enumeración del conjunto $\{a \in \mathcal{A}\colon\ g_a \neq 0_H\}$, entonces*

$$\sum (g_a)_{a \in \mathcal{A}} = \sum_{j=1}^{\infty} g_{a_j}.$$

4. *$M = \|h\|^2$.*

Demostración. La segunda afirmación se sigue de la Proposición 3. Denotemos $\{a \in \mathcal{A}\colon\ g_a \neq 0_H\}$ por P. Sea $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ una enumeración del conjunto P. Para cada p en $\mathbb{N}$ pongamos $b_p := \sum_{j=1}^{p} g_{a_j}$.

1. Demostremos que la sucesión $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos un subconjunto finito B de $\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j\in B} \|g_{a_j}\|^2 > M - \varepsilon.$$

Entonces para cada subconjunto finito C de $\mathbb{N}$ con $B \cap C = \varnothing$ tenemos

$$\sum_{j\in C} \|g_{a_j}\|^2 = \sum_{j\in B\cup C} \|g_{a_j}\|^2 - \sum_{j\in B} \|g_{a_j}\|^2 < M - (M - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Pongamos $m = \sup(B)$. Sean $p, q \in \mathbb{N}$ con $q \geq p \geq m$. Entonces $\{p+1, \ldots, q\} \cap B = \varnothing$ y

$$\|b_q - b_p\|^2 = \sum_{j=p+1}^{q} \|g_{a_j}\|^2 < \varepsilon.$$

Hemos demostrado que la sucesión $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como H es completo, esta sucesión converge a un elemento de H. Lo denotemos por h.

2. Demostremos que $\sum (g_a)_{a\in\mathcal{A}} = h$. Sea $\varepsilon > 0$. Encontremos p en $\mathbb{N}$ tal que $\|h - b_p\|^2 < \varepsilon$, esto es,

$$\sum_{j=p+1}^{\infty} \|g_{a_j}\|^2 < \varepsilon.$$

Sea $A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})$ tal que $A \supseteq \{a_1, \ldots, a_p\}$. Entonces

$$\left\| h - \sum_{a\in A} g_{a_j} \right\|^2 \leq \sum_{j=p+1}^{\infty} \|g_{a_j}\|^2 < \varepsilon. \qquad \square$$

Proyección sobre el subespacio cerrado generado por un conjunto ortonormal

9 Proposición (sobre la proyección de un vector al subespacio cerrado generado por un conjunto ortonormal)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto ortonormal en H. Denotemos por S al subespacio cerrado generado por $\mathcal{A}$. Sea $v \in H$. Entonces*

$$P_S(v) = \sum (\langle v, a\rangle a\, a)_{a\in\mathcal{A}}.$$

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in S$;

(b) $v = \sum(\langle v, a\rangle\, a)_{a \in \mathcal{A}}$;

(c) $\|v\|^2 = \sum(|\langle v, a\rangle|^2)_{a \in \mathcal{A}}$;

Criterio para que un conjunto ortonormal sea una base

10 Proposición (criterio para que un conjunto ortonormal sea una base). *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto ortonormal en H. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\operatorname{clos}(\ell(\mathcal{A})) = H$;
- *para cada v en H, $\sum(\langle v, a\rangle\, a)_{a \in \mathcal{A}} = v$;*
- *para cada v en H, $\|v\|^2 = \sum(|\langle v, a\rangle|^2)_{a \in \mathcal{A}}$;*
- *el conjunto $\mathcal{A}$ es total, esto es, $\mathcal{A}^\perp = \{0_H\}$;*
- *el conjunto $\mathcal{A}$ es un conjunto ortonormal maximal, esto es, si $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es ortonormal, entonces $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.*