Sucesiones ortonormales en espacios de Hilbert (un tema de la unidad “Espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

21 de marzo de 2024

Objetivos

- Demostrar la desigualdad de Bessel finita.
- Demostrar la desigualdad de Bessel (para sucesiones).
- Calcular la proyección ortogonal sobre la cerradura S del subespacio generado por una sucesión ortonormal.
- Establecer criterios de pertenencia a S.

Prerrequisitos

- Proyección ortogonal sobre el subespacio generado por una lista ortogonal de vectores.
- Teorema de Pitágoras.
- Criterio de convergencia de series ortogonales.

Desigualdad de Bessel finita

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

Desigualdad de Bessel finita

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

Una lista de vectores $a_1, \ldots, a_m \in H$ se llama ortonormal, si

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

Desigualdad de Bessel finita

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

Una lista de vectores $a_1, \ldots, a_m \in H$ se llama ortonormal, si

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

Proposición (desigualdad de Bessel finita)

Sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortonormal en H y sea $v \in H$. Entonces,

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

$$X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

$$X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle\, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces, $v = u_m + w_m$ y $u_m \in X_m$.

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

$$X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces, $v = u_m + w_m$ y $u_m \in X_m$. Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w_m, a_j \rangle$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

$$X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces, $v = u_m + w_m$ y $u_m \in X_m$. Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w_m, a_j \rangle =$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

$$X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces, $v = u_m + w_m$ y $u_m \in X_m$. Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w_m, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \langle a_k, a_j \rangle$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

$$X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle\, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces, $v = u_m + w_m$ y $u_m \in X_m$. Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w_m, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \langle a_k, a_j \rangle =$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

$$X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces, $v = u_m + w_m$ y $u_m \in X_m$. Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w_m, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \langle a_k, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \delta_{j,k}$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

$$X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces, $v = u_m + w_m$ y $u_m \in X_m$. Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w_m, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \langle a_k, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \delta_{j,k} =$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

$$X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces, $v = u_m + w_m$ y $u_m \in X_m$. Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w_m, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \langle a_k, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \delta_{j,k} = 0.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

$$X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle\, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces, $v = u_m + w_m$ y $u_m \in X_m$. Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w_m, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \langle a_k, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \delta_{j,k} = 0.$$

Hemos demostrado que $w_m \in \{a_1, \ldots, a_m\}^{\perp} = X_m^{\perp}$.

Demostración de la desigualdad de Bessel, final

Estamos usando la siguiente descomposición de v:

$$v = u_m + w_m, \qquad u_m = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\langle v, a_k \rangle}_{\lambda_k} a_k.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, final

Estamos usando la siguiente descomposición de v:

$$v = u_m + w_m, \qquad u_m = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\langle v, a_k \rangle}_{\lambda_k} a_k.$$

Como $u_m \perp w_m$ y los vectores $\lambda_k a_k$ son ortogonales a pares, por el teorema de Pitágoras

$$\|v\|^2 = \|u_m\|^2 + \|w_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 + \|w_m\|^2.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, final

Estamos usando la siguiente descomposición de v:

$$v = u_m + w_m, \qquad u_m = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\langle v, a_k \rangle}_{\lambda_k} a_k.$$

Como $u_m \perp w_m$ y los vectores $\lambda_k a_k$ son ortogonales a pares, por el teorema de Pitágoras

$$\|v\|^2 = \|u_m\|^2 + \|w_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 + \|w_m\|^2.$$

Esto implica que

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Desigualdad de Bessel

Una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama ortonormal, si

$$\forall j,k\in\mathbb{N}\qquad \langle a_j,a_k\rangle=\delta_{j,k}.$$

Desigualdad de Bessel

Una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama ortonormal, si

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \qquad \langle a_j, a_k\rangle = \delta_{j,k}.$$

Proposición (desigualdad de Bessel)

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Entonces,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k\rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel

Para cada m en $\mathbb{N}$, los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales.

Demostración de la desigualdad de Bessel

Para cada m en $\mathbb{N}$, los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales.

Para cada m en $\mathbb{N}$, aplicamos la desigualdad de Bessel finita:

Demostración de la desigualdad de Bessel

Para cada m en $\mathbb{N}$, los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales.

Para cada m en $\mathbb{N}$, aplicamos la desigualdad de Bessel finita:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel

Para cada m en $\mathbb{N}$, los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales.

Para cada m en $\mathbb{N}$, aplicamos la desigualdad de Bessel finita:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Pasamos al supremo sobre m y obtenemos el resultado:

Demostración de la desigualdad de Bessel

Para cada m en $\mathbb{N}$, los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales.

Para cada m en $\mathbb{N}$, aplicamos la desigualdad de Bessel finita:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Pasamos al supremo sobre m y obtenemos el resultado:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2$$

Demostración de la desigualdad de Bessel

Para cada m en $\mathbb{N}$, los vectores $a_1, \dots, a_m$ son ortonormales.

Para cada m en $\mathbb{N}$, aplicamos la desigualdad de Bessel finita:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Pasamos al supremo sobre m y obtenemos el resultado:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2 =$$

Demostración de la desigualdad de Bessel

Para cada m en $\mathbb{N}$, los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales.

Para cada m en $\mathbb{N}$, aplicamos la desigualdad de Bessel finita:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Pasamos al supremo sobre m y obtenemos el resultado:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2 = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2$$

Demostración de la desigualdad de Bessel

Para cada m en $\mathbb{N}$, los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales.

Para cada m en $\mathbb{N}$, aplicamos la desigualdad de Bessel finita:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Pasamos al supremo sobre m y obtenemos el resultado:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2 = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq$$

Demostración de la desigualdad de Bessel

Para cada m en $\mathbb{N}$, los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales.

Para cada m en $\mathbb{N}$, aplicamos la desigualdad de Bessel finita:

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Pasamos al supremo sobre m y obtenemos el resultado:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2 = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Proyección ortogonal de un vector sobre la cerradura del subespacio generado por una sucesión ortonormal

Proposición

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Sea

$$S := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\})).$$

Pongamos

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k.$$

Entonces, $u \in S$ y $v - u \perp S$.

Demostración, inicio

Pongamos $\lambda_k := \langle v, a_k \rangle$.

Demostración, inicio

Pongamos $\lambda_k := \langle v, a_k \rangle$. Por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|v\|^2.$$

Demostración, inicio

Pongamos $\lambda_k := \langle v, a_k \rangle$. Por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|v\|^2.$$

Luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge.

Demostración, inicio

Pongamos $\lambda_k := \langle v, a_k \rangle$. Por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|v\|^2.$$

Luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge.

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = \lim_{m\to\infty} b_m, \qquad \text{donde} \qquad b_m := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, a_k.$$

Demostración, inicio

Pongamos $\lambda_k := \langle v, a_k \rangle$. Por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|v\|^2.$$

Luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge.

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = \lim_{m \to \infty} b_m, \qquad \text{donde} \qquad b_m := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Por la construcción, $u \in S$.

Demostración, inicio

Pongamos $\lambda_k := \langle v, a_k \rangle$. Por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|v\|^2.$$

Luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge.

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = \lim_{m\to\infty} b_m, \qquad \text{donde} \qquad b_m := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, a_k.$$

Por la construcción, $u \in S$.

Pongamos $w = v - u$.

Demostración, inicio

Pongamos $\lambda_k := \langle v, a_k \rangle$. Por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|v\|^2.$$

Luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge.

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = \lim_{m\to\infty} b_m, \qquad \text{donde} \qquad b_m := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, a_k.$$

Por la construcción, $u \in S$.

Pongamos $w = v - u$. Nos falta demostrar que $w \in S^{\perp}$.

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \mathrm{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^\perp.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^\perp}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^{\perp}}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \mathrm{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^{\perp}}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle$$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^\perp.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^\perp}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle =$$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^{\perp}}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - u, a_p \rangle$$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^\perp.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^\perp}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - u, a_p \rangle =$$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^{\perp}}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - u, a_p \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle v - b_m, a_p \rangle$$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^{\perp}}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - u, a_p \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle v - b_m, a_p \rangle =$$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^{\perp}}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - u, a_p \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle v - b_m, a_p \rangle = 0.$$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^\perp.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^\perp}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - u, a_p \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle v - b_m, a_p \rangle = 0.$$

Luego $\quad w \in \{a_p : \; p \in \mathbb{N}\}^\perp$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^{\perp}}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - u, a_p \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle v - b_m, a_p \rangle = 0.$$

Luego $\quad w \in \{a_p \colon \; p \in \mathbb{N}\}^{\perp} =$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \dots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^{\perp}}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - u, a_p \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle v - b_m, a_p \rangle = 0.$$

Luego $\quad w \in \{a_p \colon \ p \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \operatorname{lin}(\{a_p \colon \ p \in \mathbb{N}\})^{\perp}$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^{\perp}}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - u, a_p \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle v - b_m, a_p \rangle = 0.$$

Luego $\quad w \in \{a_p\colon\ p \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \operatorname{lin}(\{a_p\colon\ p \in \mathbb{N}\})^{\perp} =$

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k \in X_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad v - b_m \in X_m^{\perp}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$,

$$\langle \underbrace{v - b_m}_{\in X_m^{\perp}}, \underbrace{a_p}_{\in X_m} \rangle = 0.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$.

Usamos el hecho que $b_m \to u$ y la continuidad del producto interno:

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - u, a_p \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle v - b_m, a_p \rangle = 0.$$

Luego $\quad w \in \{a_p \colon \ p \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \operatorname{lin}(\{a_p \colon \ p \in \mathbb{N}\})^{\perp} = S^{\perp}.$

Criterio de pertenencia de un vector al subespacio cerrado generado por una sucesión ortonormal

Proposición

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$.

$$S := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\})).$$

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in S$;

(b) $v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k\rangle a_k$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k\rangle|^2 = \|v\|^2$ (la identidad de Parseval).

Demostración, inicio

Usamos la notación u y w de la proposición anterior.

Demostración, inicio

Usamos la notación u y w de la proposición anterior.

Entonces, las condiciones (a), (b), (c) se convierten en las siguientes.

(a) $v \in S$;

(b) $v = u$;

(c) $\|u\| = \|v\|$.

Demostración, final

Supongamos (b) y demostremos (a).

Demostración, final

Supongamos (b) y demostremos (a).

$v = u \in S$.

Demostración, final

Supongamos (b) y demostremos (a).

$v = u \in S$.

Supongamos (a) y demostremos (c).

Demostración, final

Supongamos (b) y demostremos (a).

$v = u \in S$.

Supongamos (a) y demostremos (c).

Tenemos $w = v - u \in S$, pero $w \perp S$, así que $w = 0_H$, $v = u$ y $\|v\| = \|u\|$.

Demostración, final

Supongamos (b) y demostremos (a).

$v = u \in S$.

Supongamos (a) y demostremos (c).

Tenemos $w = v - u \in S$, pero $w \perp S$, así que $w = 0_H$, $v = u$ y $\|v\| = \|u\|$.

Supongamos (c) y demostremos (b).

Demostración, final

Supongamos (b) y demostremos (a).

$v = u \in S$.

Supongamos (a) y demostremos (c).

Tenemos $w = v - u \in S$, pero $w \perp S$, así que $w = 0_H$, $v = u$ y $\|v\| = \|u\|$.

Supongamos (c) y demostremos (b).

Por la identidad de Pitágoras, $\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$.

La suposición (c) significa que $\|v\|^2 = \|u\|^2$.

Luego $w = 0_H$ y $v = u$.