Sucesiones ortonormales en espacios de Hilbert

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

1 Proposición (criterio de convergencia de una serie cuyos sumandos son ortogonales a pares)**.** *Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge si, y solo si, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ converge.*

2 Corolario. *Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge si, y solo si, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ converge.*

3 Proposición (desigualdad de Bessel)**.** *Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k\rangle|^2 < +\infty.$$

4 Proposición (sobre el subespacio cerrado generado por un conjunto de vectores)**.** *Sean X un subconjunto de H, S el subespacio vectorial generado por X, W la cerradura de S. Entonces W es el mínimo entre los subespacios cerrados que contienen a X.*

Demostración. Primero mostremos que W es un subespacio vectorial de H. En efectro, si $x, y \in W$, $\varepsilon > 0$, entonces existen $a, b \in S$ tales que $\|x - a\| < \varepsilon/2$, $\|y - b\| < \varepsilon/2$, luego $\|(x + y) - (a + b)\| < \varepsilon$ y $a + b \in S$. Como ε es arbitrario, $x + y \in \operatorname{clos}(S) = W$.

Sea Y un subespacio cerrado de H tal que $X \subseteq Y$. Entonces $S \subseteq Y$ y $W \subseteq Y$. □

5 Proposición (proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio cerrado generado por una sucesión ortonormal)**.** *Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H. Denotemos por S al subespacio ceerrado generado por $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$. Pongamos*

$$\lambda_k := \langle v, a_k\rangle, \qquad u := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k, \qquad w := v - u.$$

Entonces $v = u + w$, $u \in S$ y $w \in S^\perp$.

Demostración. Por la desigualdad de Bessel (Proposición 3), $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$. Por el Corolario 2, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge. Pongamos $s_m := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$. Entonces para cada m en $\mathbb{N}$ tenemos $s_m \in S$, luego $u \in S$. Además, si $j \in \mathbb{N}$ y $m \geq j$, entonces

$$\langle s_m, a_j\rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta_{k,j} = \lambda_j = \langle v, a_j\rangle.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$ y concluimos que $\langle u, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle$, esto es, $\langle w, a_j \rangle = 0$. Como j es arbitrario, obtenemos que $w \in S^\perp$. □

6 Corolario. *En las condiciones de la Proposición 5,*

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2 + \|w\|^2.$$

7 Corolario. *En las condiciones de la Proposición 5, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $v \in S$;

(b) existe una sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{C}$ *tal que* $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$;

(c) $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k$;

(d) $\|v\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2$.

8 Teorema (criterio para que una sucesión ortonormal sea una base del espacio de Hilbert)**.** *Sea* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión ortonormal en* H*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\operatorname{clos}(\ell\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}) = H$;

(b) para cada v *en* H *existe una sucesión* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{C}$ *tal que* $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$;

(c) para cada v *en* H*,* $\quad v = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k$;

(d) para cada v *en* H*,* $\quad \|v\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2$.

(e) $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}$.