Sucesiones ortonormales y bases ortonormales

1 Proposición (desigualdad de Bessel)**.** *Sea* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert* H*, y sea* $v \in H$*. Entonces*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle v, a_k\rangle|^2 \le \|v\|. \tag{1}$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Pongamos

$$u_m := \sum_{k\le m} \langle v, a_k\rangle a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces

$$\|v\|^2 = \|u_m\|^2 + \|w_m\|^2 = \sum_{k\le m} |\langle v, a_k\rangle|^2 + \|w_m\|^2.$$

En particular,

$$\sum_{k\le m} |\langle v, a_k\rangle|^2 \le \|v\|^2.$$

Pasando al supremo sobre m, obtenemos (1). $\square$

2 Proposición (proyección de un vector a la cerradura del espacio generado por una sucesión ortonormal)**.** *Sea* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert* H*, y sea* $v \in H$*. Denotemos por* S *a la cerradura del subespacio generado por el conjunto* $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$*. Pongamos*

$$u := \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, a_k\rangle a_k, \qquad w := v - u.$$

Entonces $u \in S$*,* $w \perp S$ *y* $v = u + w$*.*

Demostración. Notemos que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\langle v, a_k\rangle a_k\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle v, a_k\rangle|^2 \le v,$$

por eso la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, a_k\rangle a_k$ converge. Por la construcción, $u \in S$ y $v = u+w$. Pongamos

$$b_m = \sum_{k\le m} \langle v, a_k\rangle a_k.$$

Sabemos que $b_m \to u$. Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \ge p$ tenemos

$$\langle w, a_p\rangle = \langle v - b_m, a_p\rangle + \langle b_m - u, a_p\rangle = \langle b_m - u, a_p\rangle.$$

Pasando al límite cuando m tiende a infinito, obtenemos $w \perp a_p$. Luego $w \perp S$. $\square$

3 Proposición. *Sea* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert* H*, y sea* $v \in H$*. Denotemos por* S *a la cerradura del subespacio vectorial generado por el conjunto* $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $v \in S$*;*

(b) $v = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, a_k\rangle a_k$*;*

(c) $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle v, a_k\rangle|^2 = \|v\|^2$.

Demostración. Usemos la notación de la Proposición 2. Obviamente (b) implica (a).

Supongamos (a) y demostremos (c). Tenemos $w = v - u \in S$, pero $w \perp S$, así que $w = 0_H$, $v = u$ y $\|v\|^2 = \|u\|^2$.

Supongamos (c) y demostremos (b). Como $\|v\|^2 = \|u\|^2$, obtenemos $w = 0_H$ y $v = u$. □

4 Definición. Sea X un conjunto en H. Se dice que X es *total* si $X^\perp = \{0_H\}$.

5 Proposición. *Sea* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert* H*. Denotemos por* S *a la cerradura del subespacio vectorial generado por el conjunto* $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $S = H$*;*

(b) para cada v *en* H*,* $v = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, a_k\rangle a_k$*;*

(c) para cada v *en* H*,* $\|v\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle v, a_k\rangle|^2$*;*

(d) el conjunto $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ *es total.*

Demostración. La equivalencia de (a), (b), (c) se sigue de la proposición anterior. De (c) se sigue (d). Supongamos (d). Sea $v \in H$. Entonces $w \perp a_k$ para cada k en $\mathbb{N}$, y por (d) obtenemos $w = 0_H$. □