Bases ortonormales en espacios de Hilbert (un tema de la unidad "Espacios de Hilbert")

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

14 de marzo de 2023

Trabajamos en un espacio de Hilbert H.

Objetivos:

- estudiar varias descripciones equivalentes de bases ortonormales (bases de Hilbert);
- demostrar un criterio de existencia de una base ortonormal numerable;
- demostrar que cualquier espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$.

Prerrequisitos:

- el criterio de pertenencia de un vector al subespacio cerrado generado por una sucesión ortonormal de vectores;
- el complemento ortogonal de un subespacio cerrado;
- el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt.

Repaso: criterio de pertenencia de un vector al subespacio cerrado generado por una sucesión ortonormal

Proposición

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$.

$$S := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\})).$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in S$;

(b) $v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2 = \|v\|^2$ (la identidad de Parseval).

Bases ortonormales en espacios de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$.

Bases ortonormales en espacios de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$.

Se dice que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal y

$$\forall v \in H \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle \, a_k .$$

Bases ortonormales en espacios de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$.

Se dice que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal y

$$\forall v \in H \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle \, a_k .$$

En vez de la frase base ortonormal, se usa también la frase base de Hilbert.

Conjuntos completos y sucesiones completas

Sea $X \subseteq H$. Se dice que el conjunto X es completo, si $\mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X)) = H$.

Conjuntos completos y sucesiones completas

Sea $X \subseteq H$. Se dice que el conjunto X es completo, si $\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = H$.

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$. Se dice que la sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es completa, si su imagen $a[\mathbb{N}]$ es un conjunto completo, esto es,

$$\operatorname{clos}\left(\operatorname{lin}\left(\{a_k:\ \ k \in \mathbb{N}\}\right)\right) = H.$$

Conjuntos completos y sucesiones completas

Sea $X \subseteq H$. Se dice que el conjunto X es completo, si $\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = H$.

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$. Se dice que la sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es completa, si su imagen $a[\mathbb{N}]$ es un conjunto completo, esto es,

$$\operatorname{clos}\Big(\operatorname{lin}\Big(\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\}\Big)\Big) = H.$$

Notemos que este concepto tiene sentido no solamente en espacios de Hilbert, sino también en espacios normados y, más general, en espacios vectoriales topológicos.

Conjuntos totales y sucesiones totales

Un conjunto $X \subseteq H$ se llama total, si $X^{\perp} = \{0_H\}$.

Conjuntos totales y sucesiones totales

Un conjunto $X \subseteq H$ se llama total, si $X^\perp = \{0_H\}$.

Una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama total, si

$$\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}.$$

Conjuntos totales y sucesiones totales

Un conjunto $X \subseteq H$ se llama total, si $X^\perp = \{0_H\}$.

Una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama total, si

$$\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}.$$

En otras palabras, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es total, si

$$\forall x \in H \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N} \qquad \langle x, a_k\rangle = 0\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0_H.$$

Completo $\iff$ total

Proposición

Sea $X \subseteq H$. Entonces X es completo $\iff$ X es total.

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que X es completo:

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = H.$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que X es completo:

$$\mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X)) = H.$$

Como $X = \mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X))$,

$$X^{\perp}$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que X es completo:

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = H.$$

Como $X = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X))$,

$$X^{\perp} =$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que X es completo:

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = H.$$

Como $X = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X))$,

$$X^{\perp} = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X))^{\perp}$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que X es completo:

$$\mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X)) = H.$$

Como $X = \mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X))$,

$$X^\perp = \mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X))^\perp =$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que X es completo:

$$\mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X)) = H.$$

Como $X = \mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X))$,

$$X^{\perp} = \mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X))^{\perp} = H^{\perp}$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que X es completo:

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = H.$$

Como $X = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X))$,

$$X^\perp = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X))^\perp = H^\perp =$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que X es completo:

$$\mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X)) = H.$$

Como $X = \mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X))$,

$$X^{\perp} = \mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X))^{\perp} = H^{\perp} = \{0_H\}.$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que X es completo:

$$\mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X)) = H.$$

Como $X = \mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X))$,

$$X^\perp = \mathrm{clos}(\mathrm{lin}(X))^\perp = H^\perp = \{0_H\}.$$

Hemos demostrado que X es total.

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^{\perp})^{\perp}$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^{\perp})^{\perp} =$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^{\perp})^{\perp} = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)).$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^{\perp})^{\perp} = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)).$$

Luego

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X))$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^{\perp})^{\perp} = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)).$$

Luego

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) =$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^{\perp})^{\perp} = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)).$$

Luego

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = (X^{\perp})^{\perp}$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^{\perp})^{\perp} = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)).$$

Luego

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = (X^{\perp})^{\perp} =$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^{\perp})^{\perp} = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)).$$

Luego

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = (X^{\perp})^{\perp} = \{0_H\}^{\perp}$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^{\perp})^{\perp} = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)).$$

Luego

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = (X^{\perp})^{\perp} = \{0_H\}^{\perp} =$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^\perp = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^\perp)^\perp = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)).$$

Luego

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = (X^\perp)^\perp = \{0_H\}^\perp = H.$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que X es total:

$$X^{\perp} = \{0_H\}.$$

Del teorema sobre la proyección ortogonal se sigue que

$$(X^{\perp})^{\perp} = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)).$$

Luego

$$\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(X)) = (X^{\perp})^{\perp} = \{0_H\}^{\perp} = H.$$

Hemos demostrado que X es completo.

Criterio de una base ortonormal (base de Hilbert)

Teorema

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H. Entonces las sig. condiciones son equivalentes.

(a) La sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es completa: $\quad \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k\colon\ k\in\mathbb{N}\})) = H$.

(b) La sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal:

$$\forall v \in H \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k\rangle a_k.$$

(c) Para cada v en H, se cumple la identidad de Parseval: $\quad \|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k\rangle|^2.$

(d) La sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es total.

Demostración

Pongamos

$$S := \mathrm{clos}(\mathrm{lin}(\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\})) = H.$$

Demostración

Pongamos

$$S := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\})) = H.$$

Las equivalencias entre (a), (b), (c) se siguen del criterio que $v \in S$.

Demostración

Pongamos

$$S := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\})) = H.$$

Las equivalencias entre (a), (b), (c) se siguen del criterio que $v \in S$.

También hemos mostrado la equivalencia entre (a) y (d).

Demostración directa de la implicación (d)$\Longrightarrow$(b)

Supongamos que $\{a_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0_H\}$ y demostremos de manera directa (b).

Demostración directa de la implicación (d)$\Longrightarrow$(b)

Supongamos que $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}$ y demostremos de manera directa (b).

Sea $v \in H$.

Demostración directa de la implicación (d)$\Longrightarrow$(b)

Supongamos que $\{a_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}$ y demostremos de manera directa (b).

Sea $v \in H$. Pongamos

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k, \qquad w := v - u.$$

Demostración directa de la implicación (d)$\Longrightarrow$(b)

Supongamos que $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}$ y demostremos de manera directa (b).

Sea $v \in H$. Pongamos

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k, \qquad w := v - u.$$

Como ya vimos en los temas anteriores, $w \in S^\perp$.

Demostración directa de la implicación (d)$\Longrightarrow$(b)

Supongamos que $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}$ y demostremos de manera directa (b).

Sea $v \in H$. Pongamos

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k, \qquad w := v - u.$$

Como ya vimos en los temas anteriores, $w \in S^\perp$.

En particular, $w \perp a_k$ para cada k.

Demostración directa de la implicación (d)$\Longrightarrow$(b)

Supongamos que $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}$ y demostremos de manera directa (b).

Sea $v \in H$. Pongamos

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k, \qquad w := v - u.$$

Como ya vimos en los temas anteriores, $w \in S^\perp$.

En particular, $w \perp a_k$ para cada k.

Por lo tanto, $w = 0_H$.

Demostración directa de la implicación (d)$\Longrightarrow$(b)

Supongamos que $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}$ y demostremos de manera directa (b).

Sea $v \in H$. Pongamos

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k, \qquad w := v - u.$$

Como ya vimos en los temas anteriores, $w \in S^\perp$.

En particular, $w \perp a_k$ para cada k.

Por lo tanto, $w = 0_H$.

Concluimos que $v = u$.

Sobre los coeficientes de una serie ortonormal

Proposición

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Supongamos que la siguiente serie converge y denotemos su suma por v:

$$v := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k.$$

Entonces para cada j en $\mathbb{N}$,

$$\xi_j = \langle v, a_j \rangle.$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento.

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle =$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle =$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle =$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \left\langle a_k,\ a_j \right\rangle .$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \left\langle a_k,\ a_j \right\rangle .$$

Aplicamos la ortonormalidad:

$$\langle v, a_j \rangle$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \langle a_k,\ a_j \rangle .$$

Aplicamos la ortonormalidad:

$$\langle v, a_j \rangle =$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \langle a_k,\ a_j \rangle .$$

Aplicamos la ortonormalidad:

$$\langle v, a_j \rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \delta_{k,j}.$$

Demostración

Sea $j \in \mathbb{N}$.

El producto interno es continuo y lineal respecto al primer argumento. Por lo tanto,

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k,\ a_j \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \langle a_k,\ a_j \rangle .$$

Aplicamos la ortonormalidad:

$$\langle v, a_j \rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \delta_{k,j}.$$

Si $m \geq j$, entonces de la última suma se queda el sumando con $k = j$, es decir, ξ_j.

La identidad de Parseval para el producto interno

Ejercicio. Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.
Sean $x, y \in H$. Demostrar que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, a_k\rangle\, \overline{\langle y, a_k\rangle}.$$

Ejercicio. Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal (en otras palabras, una base de Hilbert),
- $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder.

La base canónica en $\ell^2(\mathbb{N})$

Ejercicio. En $\ell^2(\mathbb{N})$ consideramos las sucesiones

$$e_j := (\delta_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Demostrar que $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Criterio de existencia de una base ortonormal numerable

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

Entonces en H existe una base ortonormal $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \iff H$ es separable.

Idea de demostración $\Leftarrow$

Supongamos que H es separable.

Idea de demostración $\Leftarrow$

Supongamos que H es separable. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\operatorname{clos}(X) = H$, donde

$$X := \{x_k : \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Idea de demostración $\Leftarrow$

Supongamos que H es separable. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\operatorname{clos}(X) = H$, donde

$$X := \{x_k : \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Pongamos $S := \operatorname{lin}(X)$.

Idea de demostración $\Leftarrow$

Supongamos que H es separable. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\operatorname{clos}(X) = H$, donde

$$X := \{x_k : \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Pongamos $S := \operatorname{lin}(X)$.

Aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt a $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Idea de demostración $\Leftarrow$

Supongamos que H es separable. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\operatorname{clos}(X) = H$, donde

$$X := \{x_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Pongamos $S := \operatorname{lin}(X)$.

Aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt a $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Obtenemos una sucesión ortonormal $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\operatorname{lin}(\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}) = S.$$

Idea de demostración $\Leftarrow$

Supongamos que H es separable. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\operatorname{clos}(X) = H$, donde

$$X := \{x_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Pongamos $S := \operatorname{lin}(X)$.

Aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt a $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Obtenemos una sucesión ortonormal $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\operatorname{lin}(\{a_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}) = S.$$

Luego $\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k \colon\ k \in \mathbb{N}\})) = \operatorname{clos}(S) \supseteq \operatorname{clos}(X) = H$.

En espacios de Hilbert no separables, aplicando el lema de Zorn,
se puede demostrar la existencia de conjuntos ortonormales maximales.

En espacios de Hilbert no separables, aplicando el lema de Zorn,
se puede demostrar la existencia de conjuntos ortonormales maximales.

Estos conjuntos sirven como bases ortonormales no numerables.

En espacios de Hilbert no separables, aplicando el lema de Zorn,
se puede demostrar la existencia de conjuntos ortonormales maximales.

Estos conjuntos sirven como bases ortonormales no numerables.

En este curso no vamos a trabajar con bases ortonormales no numerables.

Isomorfismo isométrico entre H y $\ell^2(\mathbb{N})$

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.

Definimos

$$\Phi\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H, \qquad \Phi(\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k,$$

$$\Psi\colon H \to \ell^2(\mathbb{N}), \qquad \Psi(v) := (\langle v, a_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Entonces Φ y Ψ son isomorfismos isométricos mutualmente inversos.

Isomorfismo isométrico entre H y $\ell^2(\mathbb{N})$

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.

Definimos

$$\Phi\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H, \qquad \Phi(\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k,$$

$$\Psi\colon H \to \ell^2(\mathbb{N}), \qquad \Psi(v) := (\langle v, a_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Entonces Φ y Ψ son isomorfismos isométricos mutualmente inversos.

Demostración: ejercicio.

Isomorfismo isométrico entre dos espacios de Hilbert de dimensión infinita y separables

Corolario

Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

Entonces H_1 y H_2 son isométricamente isomorfos.

Isomorfismo isométrico entre dos espacios de Hilbert de dimensión infinita y separables

Corolario

Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

Entonces H_1 y H_2 son isométricamente isomorfos.

Ejercicio.

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H_1 y sea $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H_2.

Mostrar que las siguientes funciones $S\colon H_1 \to H_2$ y $T\colon H_2 \to H_1$ son isomorfismos isométricos:

$$S(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, a_k \rangle_{H_1} b_k, \qquad T(y) := \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, b_k \rangle_{H_2} a_k.$$