# Proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert

**1 Lema** (sobre la distancia entre dos vectores en un espacio de Hilbert y la norma de su semisuma)**.** *Sean* $a, b \in H$*. Entonces*

$$\left\| \frac{1}{2}(a+b) \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - \frac{1}{4}\|a-b\|^2, \tag{1}$$

*y*

$$\|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) - 4\left\| \frac{1}{2}(a+b) \right\|^2. \tag{2}$$

*Demostración.* Aplicamos la identidad de paralelogramo a los vectores $a$ y $b$ y escribimos $\|a+b\|^2$ como $4\|\frac{1}{2}(a+b)\|^2$:

$$4\left\| \frac{1}{2}(a+b) \right\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

De aquí se obtienen (1) y (2). □

**2 Proposición** (sobre el elemento más cercano al origen en un subconjunto convexo cerrado no vacío de un espacio de Hilbert)**.** *Sean* $H$ *un espacio de Hilbert,* $X$ *un subconjunto no vacío de* $H$*, convexo y cerrado. Entonces en* $X$ *existe un único punto* $a$ *tal que*

$$\|a\| = \inf_{b \in X} \|b\|.$$

*Demostración.* Sea $\delta = d(0, X)$. Encontramos una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x_k\| \to \delta$. Notemos que $(x_j + x_k)/2 \in X$,

$$\left\| \frac{1}{2}(x_j + x_k) \right\| \geq \delta.$$

Por (2),

$$\|x_j - x_k\|^2 \leq 2(\|x_j\|^2 + \|x_k\|^2) - 4\delta^2.$$

Si $j, k \to \infty$, entonces la última expresión tiende a cero. Concluimos que la sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Denotemos su límite por $a$. Como $X$ es cerrado, $a \in X$ y $\|a\| \geq \delta$. Por otro lado

$$\|a\| \leq \|a - x_k\| + \|x_k\| \to \delta.$$

Concluimos que $\|a\| = \delta$. Demostremos que si $b \in X$ y $\|b\| = \delta$, entonces $a = b$. En efecto, $(a+b)/2 \in X$, $\|(a+b)/2\| \geq \delta$, y por (1)

$$\|a-b\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$ □

**3 Proposición** (sobre el elemento más cercano a un vector en un subconjunto convexo cerrado no vacío de un espacio de Hilbert)**.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert, $X$ un subconjunto no vacío de $H$, convexo y cerrado, y sea $y \in H$. Entonces en $X$ existe un único punto $a$ tal que*

$$\|a - y\| = \inf_{b \in X} \|b - y\|.$$

*Idea de demostración.* Aplicar la Proposición 2 al conjunto $X - y$. □

**4 Proposición** (sobre la proyección ortogonal de un vector a un subespacio cerrado)**.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert, $S$ un subespacio cerrado de $H$, $v \in H$. Entonces existe un único par de vectores $(u, w)$ tal que $u \in S$, $w \in S^\perp$ y $v = u + w$.*

*Demostración.* Por la Proposición 3, en $S$ hay un único vector más cercano a $v$. Lo denotemos por $u$. Pongamos $w = v - u$. Vamos a demostrar que $w \perp S$. Supongamos lo contrario. Entonces existe $x$ en $S$ tal que $\langle x, w\rangle \neq 0$. Escribimos $\langle x, w\rangle$ como $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, con $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Pongamos $y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\,x$. Entonces

$$\langle y, w\rangle = r.$$

Pongamos

$$\delta = \frac{r}{\|y\|^2}, \qquad a = u + \delta y.$$

Entonces $a \in S$ y

$$\|v - a\|^2 = \|w - \delta y\|^2 = \|w\|^2 - 2\delta r + \delta^2\|y\|^2 = \|w\|^2 - \frac{r^2}{\|y\|^2} < \|w\|^2 = \|v - u\|^2.$$

Hemos encontrado un vector más cercano a $v$ que el vector $u$. Esto contradice a la elección de $u$, por eso nuestra suposición fue falsa, y en realidad $w \perp S$. □

**5 Ejercicio.** Sean $H$ un espacio de Hilbert, $S$ un subespacio cerrado de $H$, $v \in H$ y $u \in S$ tal que $v - u \perp S$. Demuestre que para cada $x$ en $S \setminus \{u\}$ se cumple la desigualdad

$$\|v - x\| > \|v - u\|.$$

**6 Definición** (el operador de proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert)**.** Sean $H$ un espacio de Hilbert, $S$ un subespacio de $H$. Definimos $P_S \colon H \to H$ mediante la siguiente regla. Para cada $v$ en $H$ definimos $P_S(v)$ como el único vector $u$ en $S$ tal que $v - u \perp S$.

**7 Proposición** (propiedades del operador de proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert)**.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert, $S$ un subespacio cerrado de $H$. Entonces $P_S$ tiene las siguientes propiedades.*

*1.* $P_S$ *es un operador lineal.*

*2.* $\|P_S\| \le 1$.

*3.* $P_S^2 = P_S$.

*4.* $\ker(P_S) = S^\perp$.

*5.* $P_S(H) = S$.

*Demostración.* 1. Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $P_S(x) + \lambda P_S(y) \in S$ y

$$(x + \lambda y) - (P_S(x) + \lambda P_S(y)) = (x - P_S(x)) + \lambda(y - P_S(y)) \in S^\perp,$$

por eso $P_S(x) + \lambda P_S(y) = P_S(x + \lambda y)$.

2. Sea $v \in H$, $u = P_S(v)$. Por la identidad de Pitágoras

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v - u\|^2 \ge \|u\|^2.$$

3. Sean $v \in H$, $u = P_S(v)$. Entonces $u \in S$ y $u - u \in S^\perp$, así que $u = P_S(u)$.

4. Sea $v \in \ker(P_S)$. Definimos $(u, w)$ como en la Proposición 4. Entonces $u = P_S(v) = 0_H$ y $v = w \in S^\perp$.

Al revés, sea $v \in S^\perp$. Entonces el par $(0_H, v)$ satisface $v = 0_H + v$, $0_H \in S$, $v \in S^\perp$, así que por la Definición 6 obtenemos $P_S(v) = 0_H$.

5. Sea $v \in H$. Entonces por la Definición 6 tenemos $P_S(v) \in S$.

Al revés, sea $v \in S$. Entonces el par $(v, 0_H)$ satisface $v = v + 0_H$, $v \in S$, $0_H \in S^\perp$, así que $v = P_S(v) \in P_S(H)$. $\square$