La proyección ortogonal sobre el subespacio generado por una lista ortogonal de vectores (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

31 de mayo de 2022

Plan

Objetivos

Sea H un espacio vectorial real o complejo con producto interno.

Sea $q_1, \ldots, q_m$ una lista ortogonal de vectores en H y sea $v \in H$. Pongamos

$$S := \ell(q_1, \ldots, q_m).$$

Queremos encontrar

$$u \in S, \qquad w \in S^{\perp} \qquad \text{tales que} \qquad v = u + w.$$

Prerrequisitos

- Espacios vectoriales con producto interno.
- Ortogonalidad de vectores en un espacio con producto interno.
- El complemento ortogonal del subespacio generado por una lista de vectores.
- La proyección ortogonal del vector sobre el subespacio generado por el vector no nulo.

Algunas aplicaciones que no veremos en esta presentación

- El proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt.
- La descomposición QR de matrices.
- Solución del problema de mínimos cuadrados.
- Solución del problema del mejor ajuste.
- La desigualdad de Bessel, sucesiones ortonormales de vectores.
- Propiedades de series de Fourier.
- Muchas aplicaciones en la teoría de operadores.

Repaso: la ortogonalidad de vectores

Dados a, b en H, se dice que a y b son ortogonales entre si y se escribe $a \perp b$, si

$$\langle a, b \rangle = 0.$$

Repaso: la ortogonalidad de vectores

Dados a, b en H, se dice que a y b son ortogonales entre si y se escribe $a \perp b$, si

$$\langle a, b \rangle = 0.$$

Como $\langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}$, la relación $\perp$ es simétrica:

$$b \perp a \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \perp b.$$

Repaso: la identidad de Pitágoras

Proposición

Sean $a, b \in H$ *tales que* $a \perp b$. *Entonces*

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Repaso: la identidad de Pitágoras

Proposición

Sean $a, b \in H$ *tales que* $a \perp b$. *Entonces*

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Demostración.

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto

Sea $X \subseteq H$. Entonces

$$X^{\perp} := \{y \in H\colon \quad \forall x \in X \quad x \perp y\}.$$

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto

Sea $X \subseteq H$. Entonces

$$X^\perp := \{y \in H\colon \quad \forall x \in X \quad x \perp y\}.$$

En vez de escribir $y \in X^\perp$, también se escribe $y \perp X$.

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto

Sea $X \subseteq H$. Entonces

$$X^{\perp} := \{y \in H \colon \quad \forall x \in X \quad x \perp y\}.$$

En vez de escribir $y \in X^{\perp}$, también se escribe $y \perp X$.

Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Demostrar que $X^{\perp}$ es un subespacio de H.

Repaso: el subespacio generado por una lista de vectores

Sean $a_1, \ldots, a_m \in H$.

Repaso: el subespacio generado por una lista de vectores

Sean $a_1, \ldots, a_m \in H$.

Denotemos por S a la envoltura lineal de $a_1, \ldots, a_m$:

$$S := \ell(a_1, \ldots, a_m),$$

Repaso: el subespacio generado por una lista de vectores

Sean $a_1, \ldots, a_m \in H$.

Denotemos por S a la envoltura lineal de $a_1, \ldots, a_m$:

$$S := \ell(a_1, \ldots, a_m),$$

Por definición, $\ell(a_1, \ldots, a_m)$ consiste de todas las combinaciones lineales de $a_1, \ldots, a_m$:

$$S = \left\{ x \in H\colon \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \quad x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right\}.$$

Repaso: el subespacio generado por una lista de vectores

Sean $a_1, \ldots, a_m \in H$.

Denotemos por S a la envoltura lineal de $a_1, \ldots, a_m$:

$$S := \ell(a_1, \ldots, a_m),$$

Por definición, $\ell(a_1, \ldots, a_m)$ consiste de todas las combinaciones lineales de $a_1, \ldots, a_m$:

$$S = \left\{ x \in H\colon \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \quad x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right\}.$$

Se sabe que S es el mínimo entre los subespacios vectoriales de H que contienen $a_1, \ldots, a_m$.

Repaso: el complemento ortogonal del subespacio generado por una lista de vectores

Proposición

Sean $a_1, \ldots, a_m \in H$. *Entonces*

$$S^\perp = \{a_1, \ldots, a_m\}^\perp.$$

En otras palabras, para cada v *en* H,

$$v \perp S \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \quad v \perp a_j.$$

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que $v \in S^{\perp}$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que $v \in S^\perp$.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $a_j \in S$, tenemos $v \perp a_j$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que $v \in S^{\perp}$.

Sea $j \in \{1, \dots, m\}$. Como $a_j \in S$, tenemos $v \perp a_j$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $v \in \{a_1, \dots, a_m\}^{\perp}$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que $v \in S^\perp$.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $a_j \in S$, tenemos $v \perp a_j$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $v \in \{a_1, \ldots, a_m\}^\perp$.

Sea $x \in S$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que $v \in S^\perp$.

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $a_j \in S$, tenemos $v \perp a_j$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $v \in \{a_1, \ldots, a_m\}^\perp$.

Sea $x \in S$. Encontramos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que $v \in S^{\perp}$.
Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $a_j \in S$, tenemos $v \perp a_j$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $v \in \{a_1, \ldots, a_m\}^{\perp}$.
Sea $x \in S$. Encontramos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Usamos la propiedad lineal conjugada del producto interno respecto al segundo argumento:

$$\langle v, x \rangle = \left\langle v, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \overline{\lambda_k} \langle v, a_k \rangle = 0.$$

Repaso: la proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio generado por un vector no nulo

Proposición

Sean $a \in H \setminus \{0_H\}$, $v \in H$. *Denotemos* $\ell(a)$ *por* S.
Entonces existe un único par (u, w) *tal que*

$$u \in S, \qquad w \in S^{\perp}, \qquad u + w = v.$$

Más aún, u *y* w *están dados por*

$$u = \frac{\langle v, a \rangle}{\|a\|^2}\, a, \qquad w = v - \frac{\langle v, a \rangle}{\|a\|^2}\, a.$$

Listas ortogonales de vectores

Sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista de vectores en H.

Se dice que esta lista es ortogonal si

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad \Big(j \neq k \quad \Longrightarrow \quad \langle a_j, a_k \rangle = 0 \Big).$$

Listas ortogonales de vectores y la delta de Kronecker

Proposición

Sea $a_1, \ldots, a_m$ *es una lista ortogonal de vectores en* H*.*

Entonces para cada $j, k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\langle a_j, a_k \rangle =$$

Listas ortogonales de vectores y la delta de Kronecker

Proposición

Sea $a_1, \ldots, a_m$ *es una lista ortogonal de vectores en* H*.*

Entonces para cada $j, k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k} \, \|a_j\|^2.$$

Listas ortogonales de vectores y la delta de Kronecker

Proposición

Sea $a_1, \ldots, a_m$ *es una lista ortogonal de vectores en* H*.*

Entonces para cada $j, k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k} \, \|a_j\|^2.$$

Demostración.

Listas ortogonales de vectores y la delta de Kronecker

Proposición

Sea $a_1, \ldots, a_m$ *es una lista ortogonal de vectores en* H*.*

Entonces para cada $j, k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k} \, \|a_j\|^2.$$

Demostración.

Si $j = k$, entonces ambos lados son

Listas ortogonales de vectores y la delta de Kronecker

Proposición

Sea $a_1, \ldots, a_m$ *es una lista ortogonal de vectores en* H*.*
Entonces para cada $j, k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k} \, \|a_j\|^2.$$

Demostración.

Si $j = k$, entonces ambos lados son $\|a_j\|^2$.

Listas ortogonales de vectores y la delta de Kronecker

Proposición

Sea $a_1, \ldots, a_m$ *es una lista ortogonal de vectores en* H.

Entonces para cada $j, k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k} \, \|a_j\|^2.$$

Demostración.

Si $j = k$, entonces ambos lados son $\|a_j\|^2$.

Si $j \neq k$, entonces ambos lados son

Listas ortogonales de vectores y la delta de Kronecker

Proposición

Sea $a_1, \ldots, a_m$ *es una lista ortogonal de vectores en* H*.*

Entonces para cada $j, k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k} \, \|a_j\|^2.$$

Demostración.

Si $j = k$, entonces ambos lados son $\|a_j\|^2$.

Si $j \neq k$, entonces ambos lados son 0.

Listas ortonormales de vectores (repaso)

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista de vectores en H.

Se dice que esta lista es ortonormal, si

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

En otras palabras, $(a_1, \ldots, a_m)$ es una lista ortonormal,

si cumple simultáneamente las siguientes dos condiciones:

1. $a_1, \ldots, a_m$ es ortogonal,
2. para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, $\quad \|a_j\| = 1$.

Criterio de ortonormalidad de una lista de vectores en $\mathbb{C}^n$

Ejercicio. Sean $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{C}^n$.

Denotemos por Q la matriz formada de las columnas $q_1, \ldots, q_m$:

$$Q = [q_1, \ldots, q_m].$$

En otras palabras, $Q_{j,k} = (q_k)_j$ para cada j, k.

Demostrar que para cada r, s en $\{1, \ldots, m\}$

$$(Q^* Q)_{r,s} = \langle q_s, q_r \rangle.$$

Demostrar que la lista $(q_1, \ldots, q_m)$ es ortonormal si, y sólo si, $Q^* Q = I_m$.

Los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales

Proposición

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H*, y sean* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$*. Consideremos el vector*

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Entonces para cada j *en* $\{1, \ldots, m\}$*,*

$$\lambda_j = \frac{\langle v, a_j \rangle}{\|a_j\|^2}.$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle =$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,\ \ a_j \right\rangle$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,\ \ a_j \right\rangle =$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,\ a_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle a_k, a_j \rangle$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,\ \ a_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle a_k, a_j \rangle =$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,\ a_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \delta_{k,j}\, \|a_j\|^2$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,\ \ a_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \delta_{k,j}\, \|a_j\|^2 =$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,\ \ a_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \delta_{k,j}\, \|a_j\|^2 = \lambda_j\, \|a_j\|^2.$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,\ \ a_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, \delta_{k,j} \, \|a_j\|^2 = \lambda_j \, \|a_j\|^2.$$

De allí,

$$\lambda_j =$$

Demostración

$$v := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces

$$\langle v, a_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,\ \ a_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \delta_{k,j}\, \|a_j\|^2 = \lambda_j\, \|a_j\|^2.$$

De allí,

$$\lambda_j = \frac{\langle v, a_j \rangle}{\|a_j\|^2}.$$

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes

Corolario

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H.

Entonces $(a_1, \ldots, a_m)$ *es linealmente independiente.*

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes

Corolario

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H.

Entonces $(a_1, \ldots, a_m)$ *es linealmente independiente.*

Demostración.

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes

Corolario

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H.

Entonces $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_H.$$

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes

Corolario

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H*.*

Entonces $(a_1, \ldots, a_m)$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_H.$$

Aplicamos la proposición anterior con $v =$

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes

Corolario

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H*.*

Entonces $(a_1, \ldots, a_m)$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_H.$$

Aplicamos la proposición anterior con $v = 0_H$.

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes

Corolario

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H*.*
Entonces $(a_1, \ldots, a_m)$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_H.$$

Aplicamos la proposición anterior con $v = 0_H$. Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\lambda_j$$

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes

Corolario

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H.

Entonces $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_H.$$

Aplicamos la proposición anterior con $v = 0_H$. Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\lambda_j =$$

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes

Corolario

Sea $(a_1, \dots, a_m)$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H.
Entonces $(a_1, \dots, a_m)$ es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_H.$$

Aplicamos la proposición anterior con $v = 0_H$. Para cada j en $\{1, \dots, m\}$,

$$\lambda_j = \frac{\langle 0_H, a_j \rangle}{\|a_j\|^2}$$

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes

Corolario

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H*.*

Entonces $(a_1, \ldots, a_m)$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_H.$$

Aplicamos la proposición anterior con $v = 0_H$. Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\lambda_j = \frac{\langle 0_H, a_j \rangle}{\|a_j\|^2} =$$

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes

Corolario

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H*.*
Entonces $(a_1, \ldots, a_m)$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_H.$$

Aplicamos la proposición anterior con $v = 0_H$. Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\lambda_j = \frac{\langle 0_H, a_j \rangle}{\|a_j\|^2} = 0.$$

Teorema

Sea $(q_1, \ldots, q_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H *y sea* $v \in H$*.*
Denotemos por S *al subespacio vectorial generado por* $q_1, \ldots, q_m$*:*

$$S := \ell(q_1, \ldots, q_m).$$

Entonces existe un único par de vectores (u, w) *tal que*

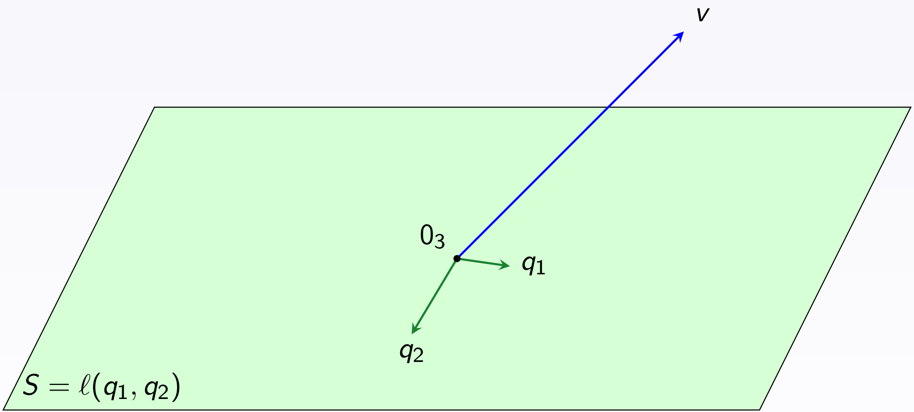
$$u \in S, \qquad w \in S^{\perp}, \qquad v = u + w. \tag{1}$$

Más aún, u *y* w *tienen las siguientes expresiones:*

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w = v - \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k. \tag{2}$$

Un dibujo para $H = \mathbb{R}^3$, $m = 2$

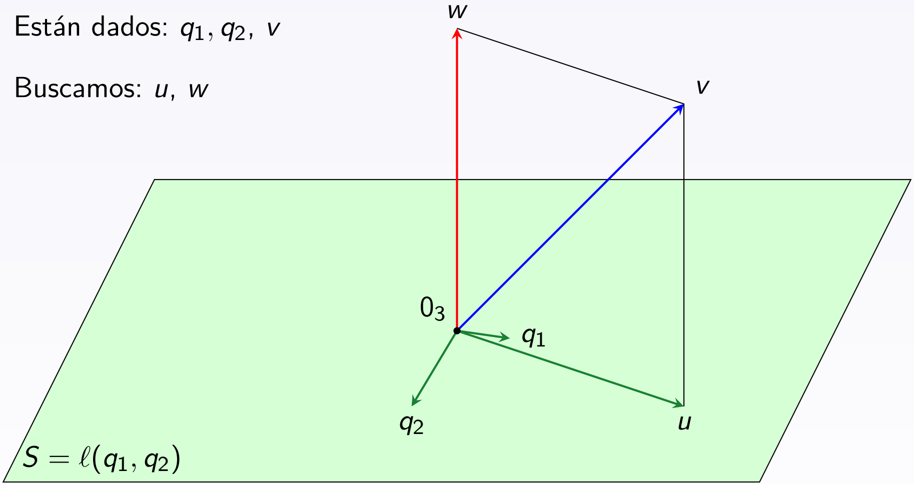
Están dados: q_1, q_2, v



Un dibujo para $H = \mathbb{R}^3$, $m = 2$

Están dados: q_1, q_2, v

Buscamos: u, w



Otra forma del mismo teorema

Teorema

Sea S un subespacio vectorial de H, sea $(q_1, \ldots, q_m)$ una base ortogonal de S y sea $v \in H$. Entonces, para cada u, w en H, las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$u \in S, \qquad w \in S^{\perp}, \qquad v = u + w; \tag{1}$$

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w = v - \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k. \tag{2}$$

Unicidad, esto es, (1)$\Rightarrow$(2)

Supongamos que u y w satisfacen (1): $\quad u \in S, \quad w \in S^{\perp}, \quad v = u + w.$

Unicidad, esto es, (1)$\Rightarrow$(2)

Supongamos que u y w satisfacen (1): $\quad u \in S, \quad w \in S^\perp, \quad v = u + w.$

Como $u \in S$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Supongamos que u y w satisfacen (1): $\quad u \in S, \quad w \in S^{\perp}, \quad v = u + w.$

Como $u \in S$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Por la proposición sobre los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales,

$$\lambda_k$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Supongamos que u y w satisfacen (1): $\quad u \in S, \quad w \in S^{\perp}, \quad v = u + w.$

Como $u \in S$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Por la proposición sobre los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales,

$$\lambda_k =$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Supongamos que u y w satisfacen (1): $\quad u \in S, \quad w \in S^{\perp}, \quad v = u + w.$

Como $u \in S$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Por la proposición sobre los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales,

$$\lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Supongamos que u y w satisfacen (1): $\quad u \in S, \quad w \in S^\perp, \quad v = u + w.$

Como $u \in S$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Por la proposición sobre los coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales,

$$\lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

Esta fórmula todavía no es buena porque el vector u es desconocido.

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^\perp$ implica que $\langle w, q_k \rangle = 0$ para cada k.

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^\perp$ implica que $\langle w, q_k \rangle = 0$ para cada k. Luego

$$\langle u, q_k \rangle$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^\perp$ implica que $\langle w, q_k \rangle = 0$ para cada k. Luego

$$\langle u, q_k \rangle =$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^{\perp}$ implica que $\langle w, q_k \rangle = 0$ para cada k. Luego

$$\langle u, q_k \rangle = \langle u, q_k \rangle + \langle w, q_k \rangle$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^\perp$ implica que $\langle w, q_k \rangle = 0$ para cada k. Luego

$$\langle u, q_k \rangle = \langle u, q_k \rangle + \langle w, q_k \rangle =$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^\perp$ implica que $\langle w, q_k \rangle = 0$ para cada k. Luego

$$\langle u, q_k \rangle = \langle u, q_k \rangle + \langle w, q_k \rangle = \langle u + w, q_k \rangle$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^\perp$ implica que $\langle w, q_k \rangle = 0$ para cada k. Luego

$$\langle u, q_k \rangle = \langle u, q_k \rangle + \langle w, q_k \rangle = \langle u + w, q_k \rangle =$$

Unicidad, esto es, (1)$\Rightarrow$(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^\perp$ implica que $\langle w, q_k \rangle = 0$ para cada k. Luego

$$\langle u, q_k \rangle = \langle u, q_k \rangle + \langle w, q_k \rangle = \langle u + w, q_k \rangle = \langle v, q_k \rangle,$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^{\perp}$ implica que $\langle w, q_k \rangle = 0$ para cada k. Luego

$$\langle u, q_k \rangle = \langle u, q_k \rangle + \langle w, q_k \rangle = \langle u + w, q_k \rangle = \langle v, q_k \rangle, \qquad \boxed{\lambda_k = \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.}$$

Unicidad, esto es, (1)⇒(2)

Hasta aquí, hemos mostrado que u debe de ser de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad \lambda_k = \frac{\langle u, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

La condición $w \in S^\perp$ implica que $\langle w, q_k \rangle = 0$ para cada k. Luego

$$\langle u, q_k \rangle = \langle u, q_k \rangle + \langle w, q_k \rangle = \langle u + w, q_k \rangle = \langle v, q_k \rangle, \qquad \lambda_k = \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}.$$

Por lo tanto,

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w = v - \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k. \tag{2}$$

Conclusión: si u, w satisfacen (1), entonces u y w deben ser los vectores (2).

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1).

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle$$

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle =$$

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle u, q_j \rangle$$

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle u, q_j \rangle =$$

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle u, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle q_k, q_j \rangle$$

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle u, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle q_k, q_j \rangle =$$

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle u, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle q_k, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \lambda_j \|q_j\|^2$$

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle u, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle q_k, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \lambda_j \|q_j\|^2 =$$

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle u, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle q_k, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \lambda_j \|q_j\|^2 = 0.$$

Existencia, esto es, (2)⇒(1)

Definimos u y w mediante las fórmulas (2):

$$\lambda_k := \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}, \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostremos que u y w satisfacen (1). Es obvio que $u \in S$ y $u + w = v$.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \langle u, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle q_k, q_j \rangle = \langle v, q_j \rangle - \lambda_j \|q_j\|^2 = 0.$$

Como $S = \ell(q_1, \ldots, q_m)$,

$$w \in S^{\perp}.$$

Corolario

Sea $(q_1, \ldots, q_m)$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H y sea $v \in H$.
Denotemos por S al subespacio vectorial generado por $q_1, \ldots, q_m$:

$$S := \ell(q_1, \ldots, q_m).$$

Definimos u como

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k.$$

Entonces u es el único elemento de S más cercano a v, esto es,

$$\forall s \in S \setminus \{u\} \qquad \|s - v\| > \|u - v\|.$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$.

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v =$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2} \, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$ y $u - v = w \in S^{\perp}$,

$$\langle s - u, u - v \rangle$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$ y $u - v = w \in S^\perp$,

$$\langle s - u, u - v \rangle =$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$ y $u - v = w \in S^{\perp}$,

$$\langle s - u, u - v \rangle = 0.$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2} q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$ y $u - v = w \in S^\perp$,

$$\langle s - u, u - v \rangle = 0.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|s - v\|^2$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2} q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$ y $u - v = w \in S^{\perp}$,

$$\langle s - u, u - v \rangle = 0.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|s - v\|^2 =$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2} \, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$ y $u - v = w \in S^{\perp}$,

$$\langle s - u, u - v \rangle = 0.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|s - v\|^2 = \|(s - u) + (u - v)\|^2$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$ y $u - v = w \in S^{\perp}$,

$$\langle s - u, u - v \rangle = 0.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|s - v\|^2 = \|(s - u) + (u - v)\|^2 =$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$ y $u - v = w \in S^{\perp}$,

$$\langle s - u, u - v \rangle = 0.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|s - v\|^2 = \|(s - u) + (u - v)\|^2 = \|s - u\|^2 + \|u - v\|^2$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$ y $u - v = w \in S^{\perp}$,

$$\langle s - u, u - v \rangle = 0.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|s - v\|^2 = \|(s - u) + (u - v)\|^2 = \|s - u\|^2 + \|u - v\|^2 >$$

Demostración del corolario

$$u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k, \qquad w := v - u.$$

Sea $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces

$$s - v = (s - u) + (u - v).$$

Como $s - u \in S$ y $u - v = w \in S^{\perp}$,

$$\langle s - u, u - v \rangle = 0.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|s - v\|^2 = \|(s - u) + (u - v)\|^2 = \|s - u\|^2 + \|u - v\|^2 > \|u - v\|^2.$$

La desigualdad de Bessel finita

Corolario

Sea $(q_1, \ldots, q_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H *y sea* $v \in H$. *Entonces*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, q_k \rangle|^2}{\|q_k\|^2} \leq \|v\|^2.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 =$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2 =$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|\lambda_k q_k\|^2$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|\lambda_k q_k\|^2$$

$$=$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|\lambda_k q_k\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^2 \|q_k\|^2$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|\lambda_k q_k\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^2 \|q_k\|^2 =$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|\lambda_k q_k\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^2 \|q_k\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, q_k\rangle|^2}{\|q_k\|^4} \|q_k\|^2$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|\lambda_k q_k\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^2 \|q_k\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, q_k \rangle|^2}{\|q_k\|^4} \|q_k\|^2 =$$

Demostración de la desigualdad de Bessel finita

Definimos u y w como en el teorema.

En las siguientes fórmulas los sumandos son ortogonales entre si:

$$v = u + w, \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Aplicamos la identidad de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2 &= \sum_{k=1}^{m} \|\lambda_k q_k\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^2 \|q_k\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, q_k\rangle|^2}{\|q_k\|^4} \|q_k\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, q_k\rangle|^2}{\|q_k\|^2}.\end{aligned}$$

El operador de la proyección ortogonal sobre $\ell(q_1, \ldots, q_m)$

Definimos $P_{q_1,\ldots,q_m} \colon H \to H$,

$$\boxed{P_{q_1,\ldots,q_m}(v) := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k.}$$

El operador de la proyección ortogonal sobre $\ell(q_1, \ldots, q_m)$

Definimos $P_{q_1,\ldots,q_m} \colon H \to H$,

$$\boxed{P_{q_1,\ldots,q_m}(v) := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k.}$$

Es fácil ver que $P_{q_1,\ldots,q_m}$ es lineal y acotado.

El operador de la proyección ortogonal sobre $\ell(q_1, \ldots, q_m)$

Definimos $P_{q_1,\ldots,q_m} \colon H \to H$,

$$\boxed{P_{q_1,\ldots,q_m}(v) := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k.}$$

Es fácil ver que $P_{q_1,\ldots,q_m}$ es lineal y acotado.

De la definición,

$$\forall v \in H \qquad P_{q_1,\ldots,q_m}(v) \in S.$$

El operador de la proyección ortogonal sobre $\ell(q_1, \ldots, q_m)$

Definimos $P_{q_1,\ldots,q_m} \colon H \to H$,

$$P_{q_1,\ldots,q_m}(v) := \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k \rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k.$$

Es fácil ver que $P_{q_1,\ldots,q_m}$ es lineal y acotado.

De la definición,

$$\forall v \in H \qquad P_{q_1,\ldots,q_m}(v) \in S.$$

Por el teorema,

$$\forall v \in H \qquad v - P_{q_1,\ldots,q_m}(v) \in S^{\perp}.$$

El operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$ se determina por $\ell(q_1, \ldots, q_m)$

Los vectores u y w del teorema se determinan de manera única por las siguientes propiedades:

$$u \in S, \qquad w \in S^{\perp}, \qquad v = u + w.$$

Estas propiedades están escritas en términos de S y v.

El operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$ se determina por $\ell(q_1, \ldots, q_m)$

Los vectores u y w del teorema se determinan de manera única por las siguientes propiedades:

$$u \in S, \qquad w \in S^\perp, \qquad v = u + w.$$

Estas propiedades están escritas en términos de S y v.

Los vectores $q_1, \ldots, q_m$ no aparecen de manera explícita en estas propiedades.

El operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$ se determina por $\ell(q_1,\ldots,q_m)$

Los vectores u y w del teorema se determinan de manera única por las siguientes propiedades:

$$u \in S, \qquad w \in S^\perp, \qquad v = u + w.$$

Estas propiedades están escritas en términos de S y v.

Los vectores $q_1,\ldots,q_m$ no aparecen de manera explícita en estas propiedades.

Sean $(q_1,\ldots,q_m)$ y $(b_1,\ldots,b_m)$ son dos bases ortogonales de S.

El operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$ se determina por $\ell(q_1,\ldots,q_m)$

Los vectores u y w del teorema se determinan de manera única por las siguientes propiedades:

$$u \in S, \qquad w \in S^\perp, \qquad v = u + w.$$

Estas propiedades están escritas en términos de S y v.

Los vectores $q_1,\ldots,q_m$ no aparecen de manera explícita en estas propiedades.

Sean $(q_1,\ldots,q_m)$ y $(b_1,\ldots,b_m)$ son dos bases ortogonales de S. Entonces para cada v en H

$$P_{q_1,\ldots,q_m} v = u, \qquad P_{b_1,\ldots,b_m} v = u.$$

El operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$ se determina por $\ell(q_1,\ldots,q_m)$

Los vectores u y w del teorema se determinan de manera única por las siguientes propiedades:

$$u \in S, \qquad w \in S^\perp, \qquad v = u + w.$$

Estas propiedades están escritas en términos de S y v.

Los vectores $q_1,\ldots,q_m$ no aparecen de manera explícita en estas propiedades.

Sean $(q_1,\ldots,q_m)$ y $(b_1,\ldots,b_m)$ son dos bases ortogonales de S. Entonces para cada v en H

$$P_{q_1,\ldots,q_m} v = u, \qquad P_{b_1,\ldots,b_m} v = u.$$

Esto significa que $P_{q_1,\ldots,q_m} = P_{b_1,\ldots,b_m}$.

El operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$ se determina por $\ell(q_1, \ldots, q_m)$

Los vectores u y w del teorema se determinan de manera única por las siguientes propiedades:

$$u \in S, \qquad w \in S^\perp, \qquad v = u + w.$$

Estas propiedades están escritas en términos de S y v.

Los vectores $q_1, \ldots, q_m$ no aparecen de manera explícita en estas propiedades.

Sean $(q_1, \ldots, q_m)$ y $(b_1, \ldots, b_m)$ son dos bases ortogonales de S. Entonces para cada v en H

$$P_{q_1,\ldots,q_m} v = u, \qquad P_{b_1,\ldots,b_m} v = u.$$

Esto significa que $P_{q_1,\ldots,q_m} = P_{b_1,\ldots,b_m}$.

Por lo tanto, en vez de $P_{q_1,\ldots,q_m}$ se puede escribir P_S, donde $S = \ell(q_1, \ldots, q_m)$.

La norma de P_S

Sea $(q_1, \ldots, q_m)$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H y sea $S := \ell(q_1, \ldots, q_m)$. Consideramos el operador

$$P_S = P_{q_1,\ldots,q_m}.$$

La norma de P_S

Sea $(q_1, \ldots, q_m)$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H y sea $S := \ell(q_1, \ldots, q_m)$. Consideramos el operador

$$P_S = P_{q_1,\ldots,q_m}.$$

Ejercicio. Suponiendo que $m \geq 1$, demostrar que

$$\|P_S\| = 1.$$

P_S es idempotente y autoadjunto

Ejercicio. Demostrar que

$$P_S^2 = P_S.$$

P_S es idempotente y autoadjunto

Ejercicio. Demostrar que

$$P_S^2 = P_S.$$

Ejercicio. Demostrar que para cada x, y en H

$$\langle P_S x, y \rangle = \langle x, P_S y \rangle.$$

La imagen y el núcleo de P_S

Ejercicio. Demostrar que

$$P_S[H] = \{v \in H\colon \quad P_S(v) = v\} = S.$$

La imagen y el núcleo de P_S

Ejercicio. Demostrar que

$$P_S[H] = \{v \in H \colon \quad P_S(v) = v\} = S.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$\ker(P_S) = S^{\perp}.$$

Descomposición del operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$ en m sumandos

Denotamos por P_a el operador de la proyección ortogonal sobre $\ell(a)$:

$$P_a(v) := \frac{\langle v, a\rangle}{\|a\|^2}\, a.$$

Descomposición del operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$ en m sumandos

Denotamos por P_a el operador de la proyección ortogonal sobre $\ell(a)$:

$$P_a(v) := \frac{\langle v, a\rangle}{\|a\|^2}\, a.$$

La fórmula

$$P_{q_1,\ldots,q_m}(v) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k\rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k.$$

significa que

$$\boxed{P_{q_1,\ldots,q_m} = \sum_{k=1}^{m} P_{q_k}.}$$

La matriz del operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$, para $H = \mathbb{C}^n$

Sean $q_1, \ldots, q_m$ vectores ortogonales no nulos en $\mathbb{C}^n$.

Definimos la matriz $M_{q_1,\ldots,q_m} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de la siguiente manera:

$$M_{q_1,\ldots,q_m} := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\|q_k\|^2}\, q_k\, q_k^*.$$

La matriz del operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$, para $H = \mathbb{C}^n$

Sean $q_1, \ldots, q_m$ vectores ortogonales no nulos en $\mathbb{C}^n$.

Definimos la matriz $M_{q_1,\ldots,q_m} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de la siguiente manera:

$$\boxed{M_{q_1,\ldots,q_m} := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\|q_k\|^2}\, q_k\, q_k^*.}$$

Si $v \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$(q_k\, q_k^*)\, v = q_k(q_k^* v) = (q_k^* v) q_k = \langle v, q_k\rangle\, q_k.$$

La matriz del operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$, para $H = \mathbb{C}^n$

Sean $q_1, \ldots, q_m$ vectores ortogonales no nulos en $\mathbb{C}^n$.

Definimos la matriz $M_{q_1,\ldots,q_m} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de la siguiente manera:

$$M_{q_1,\ldots,q_m} := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\|q_k\|^2}\, q_k\, q_k^*.$$

Si $v \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$(q_k\, q_k^*)\, v = q_k(q_k^* v) = (q_k^* v) q_k = \langle v, q_k\rangle\, q_k.$$

Luego

$$M_{q_1,\ldots,q_m} v = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k\rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k = P_{q_1,\ldots,q_m}(v).$$

La matriz del operador $P_{q_1,\ldots,q_m}$, para $H = \mathbb{C}^n$

Sean $q_1, \ldots, q_m$ vectores ortogonales no nulos en $\mathbb{C}^n$.

Definimos la matriz $M_{q_1,\ldots,q_m} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de la siguiente manera:

$$M_{q_1,\ldots,q_m} := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\|q_k\|^2}\, q_k\, q_k^*.$$

Si $v \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$(q_k\, q_k^*)\, v = q_k(q_k^* v) = (q_k^* v) q_k = \langle v, q_k\rangle\, q_k.$$

Luego

$$M_{q_1,\ldots,q_m} v = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, q_k\rangle}{\|q_k\|^2}\, q_k = P_{q_1,\ldots,q_m}(v).$$

Esto significa que $M_{q_1,\ldots,q_m}$ es la matriz asociada a $P_{q_1,\ldots,q_m}$.

La fórmula matricial para $P_{q_1,\ldots,q_m}$ en el caso de vectores ortonormales en $\mathbb{C}^n$

Proposición

Sea $(q_1, \ldots, q_m)$ *una lista de vectores ortonormales en* $\mathbb{C}^n$*.*
Denotamos por Q *la matriz formada por las columnas* $q_1, \ldots, q_m$*:*

$$Q = [q_1, \ldots, q_m].$$

Entonces

$$\boxed{M_{q_1,\ldots,q_m} = QQ^\top.}$$

Demostración

Por simplicidad, ponemos $M = M_{q_1,\ldots,q_m}$. Por definición,

$$M = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^*.$$

Demostración

Por simplicidad, ponemos $M = M_{q_1,\ldots,q_m}$. Por definición,

$$M = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^*.$$

Luego

$$M_{r,s}$$

Demostración

Por simplicidad, ponemos $M = M_{q_1,\ldots,q_m}$. Por definición,

$$M = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^*.$$

Luego

$$M_{r,s} =$$

Demostración

Por simplicidad, ponemos $M = M_{q_1,\ldots,q_m}$. Por definición,

$$M = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^*.$$

Luego

$$M_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k q_k^*)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k)_r \overline{(q_k)_s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} \overline{Q_{s,k}}.$$

Demostración

Por simplicidad, ponemos $M = M_{q_1,\dots,q_m}$. Por definición,

$$M = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^*.$$

Luego

$$M_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k q_k^*)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k)_r \overline{(q_k)_s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} \overline{Q_{s,k}}.$$

Por otro lado,

$$(QQ^*)_{r,s}$$

Demostración

Por simplicidad, ponemos $M = M_{q_1,\ldots,q_m}$. Por definición,

$$M = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^*.$$

Luego

$$M_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k q_k^*)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k)_r \overline{(q_k)_s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} \overline{Q_{s,k}}.$$

Por otro lado,

$$(QQ^*)_{r,s} =$$

Demostración

Por simplicidad, ponemos $M = M_{q_1,\dots,q_m}$. Por definición,

$$M = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^*.$$

Luego

$$M_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k q_k^*)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k)_r \overline{(q_k)_s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} \overline{Q_{s,k}}.$$

Por otro lado,

$$(QQ^*)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} (Q^*)_{k,s}$$

Demostración

Por simplicidad, ponemos $M = M_{q_1,\dots,q_m}$. Por definición,

$$M = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^*.$$

Luego

$$M_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k q_k^*)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k)_r \overline{(q_k)_s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} \overline{Q_{s,k}}.$$

Por otro lado,

$$(QQ^*)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} (Q^*)_{k,s} =$$

Demostración

Por simplicidad, ponemos $M = M_{q_1,\ldots,q_m}$. Por definición,

$$M = \sum_{k=1}^{m} q_k q_k^*.$$

Luego

$$M_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k q_k^*)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} (q_k)_r \overline{(q_k)_s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} \overline{Q_{s,k}}.$$

Por otro lado,

$$(QQ^*)_{r,s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} (Q^*)_{k,s} = \sum_{k=1}^{m} Q_{r,k} \overline{Q_{s,k}}.$$

Programación de $P_{q_1,\ldots,q_m} v$,   una solución ingenua

Dada una matriz $Q = [q_1, \ldots, q_m]$ en $\mathbb{C}^{n\times m}$ tal que $Q^* Q = I_m$, y dado v en $\mathbb{C}^n$, calculemos

$$P_{q_1,\ldots,q_m} v.$$

Programación de $P_{q_1,\ldots,q_m} v$,   una solución ingenua

Dada una matriz $Q = [q_1, \ldots, q_m]$ en $\mathbb{C}^{n\times m}$ tal que $Q^* Q = I_m$, y dado v en $\mathbb{C}^n$, calculemos

$$P_{q_1,\ldots,q_m} v.$$

```
function [u] = orth_proj_subspace_orth_basis_naive(Q, v),
    n, m = size(Q); u = complex(zeros(n, 1));
    for k = 1 : m,
        coef = Q(:, k)' * v;
        u = u + coef * Q(:, k);
    endfor
endfunction
```

Programación de $P_{q_1,\ldots,q_m} v$

```
function [u] = orth_proj_subspace_orth_basis(Q, v),
    u = Q * (Q' * v);
endfunction
```

¿Cómo generar listas de vectores ortonormales?

Para generar matrices Q con columnas ortonormales, llamamos la función `qr` que ya está realizada en el lenguaje de programación o en librerías estándares.

¿Cómo generar listas de vectores ortonormales?

Para generar matrices Q con columnas ortonormales, llamamos la función `qr` que ya está realizada en el lenguaje de programación o en librerías estándares.

Hay varios algoritmos similares a `qr`.

¿Cómo generar listas de vectores ortonormales?

Para generar matrices Q con columnas ortonormales, llamamos la función `qr` que ya está realizada en el lenguaje de programación o en librerías estándares.

Hay varios algoritmos similares a `qr`.

Uno de estos algoritmos es la ortonormalización de Gram y Schmidt.

Pruebas

```
function [er] = test_orth_proj_subspace_orth_basis(n, m),
    X = randn(n, m) + 1i * randn(n, m); [Q, R] = qr(X);
    v = randn(n, 1) + 1i * randn(n, 1);
    u1 = orth_proj_subspace_orth_basis_naive(Q, v);
    u = orth_proj_subspace_orth_basis(Q, v);
    w = v - u;
    er1 = norm(u1 - u);
    er2 = norm(Q' * w);
    er3 = abs(u' * u + w' * w - v' * v);
    er = [er1, er2, er3];
endfunction
```