Projección ortogonal sobre un subespacio cerrado

Objetivos. Dado un espacio de Hilbert H y un subespacio cerrado S de H, demostrar la existencia de un operador lineal P_S tal que $P_S^2 = P_S$, $\operatorname{im}(P_S) = S$ y $\ker(P_S) = S^\perp$. Este operador se llama la proyección ortogonal sobre S.

1 Ejercicio. Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$. Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^\perp$. Demostrar que u es el elemento de S más cercano a v.

2 Ejercicio. Sea H un espacio con producto interno y sean $x, y \in H$. Mostrar que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2.$$

3 Teorema. *Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$. Entonces, existe un único vector $u \in S$ tal que $v - u \in S^\perp$.*

Demostración. Unicidad. Supongamos que $u, a \in S$ tales que $v - u \in S^\perp$ y $v - a \in S^\perp$. Entonces, $u - a \in S \cap S^\perp$, luego $u - a = 0_H$.

Existencia. Sea u el elemento de S más cercano a v, esto es, $\|u - v\| \le \|u - s\|$ para cada s en S. Pongamos $w := v - u$ y demostremos que $w \perp S$. Razonando por contradicción supongamos que $w \notin S^\perp$. Elegimos $a \in S$ tal que $\langle w, a\rangle \ne 0$. Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle w, a\rangle}{\|a\|^2}, \qquad q := u + \lambda a.$$

Entonces, $q \in S$. Mostremos que q es más cercano a v que u:

$$\begin{aligned}\|v - q\|^2 &= \|w - \lambda a\|^2 = \|w\|^2 - 2\operatorname{Re}\Big(\overline{\lambda}\,\langle w, a\rangle\Big) + |\lambda|^2\,\|a\|^2 \\ &= \|w\|^2 - 2\,\frac{|\langle w, a\rangle|^2}{\|a\|^2} + \frac{|\langle w, a\rangle|^2}{\|a\|^2} = \|w\|^2 - \frac{|\langle w, a\rangle|^2}{\|a\|^2} < \|w\|^2.\end{aligned}$$

Esto contradice a la suposición que u es el elemento de S más cercano a v. Concluimos que $w \in S^\perp$. □

4 Definición. Sean H un espacio de Hilbert, S_1 y S_2 subespacios cerrados de H. Se escribe $H = S_1 \oplus S_2$, si $H = S_1 + S_2$ y $S_1 \perp S_2$, esto es,

$$\forall x \in S_1 \qquad \forall y \in S_2 \qquad \langle x, y\rangle = 0.$$

5 Ejercicio. Sean H, S_1, S_2 tales que $H = S_1 \oplus S_2$. Mostrar que $S_1 \cap S_2 = \{0_H\}$.

Con la notación de la Definición 4, el Teorema 3 se puede escribir de la siguiente manera equivalente.

6 Teorema. *Sean H un espacio de Hilbert y S un subespacio cerrado de H. Entonces,*

$$H = S \oplus S^\perp.$$

7 Proposición. *Sean H un espacio de Hilbert y S un subespacio cerrado de H. Entonces existe una única función $P\colon H \to H$ tal que para cada v en H*

$$Pv \in S, \qquad (I - P)v \in S^\perp.$$

Más aún, este operador P tiene las siguientes propiedades.

1. *P es lineal.*
2. *$\|Pv\| \le \|v\|$ para cada v en H.*
3. *$P^2 = P$.*
4. *$P(H) = S$, $\ker(P) = S^\perp$.*
5. *$\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ para cada $x, y \in H$.*

Demostración. La existencia y unicidad de P se siguen del Teorema 3. Demostremos que P es lineal. Sean $a, b \in H$, $\xi \in \mathbb{C}$. Entonces

$$P(a) \in S, \quad P(b) \in S, \quad a - P(a) \in S^\perp, \quad b - P(b) \in S^\perp.$$

Pongamos $x \coloneqq \xi P(a) + P(b)$. Entonces,

$$x \in S, \qquad (\xi a + b) - x = \xi(a - P(a)) + (b - P(b)) \in S^\perp.$$

Por lo tanto, $P(\xi a + b) = x$. □

8 Definición. En la situación de la Proposición 7, denotamos el operador P por P_S.

9 Corolario. *Sean H, S, P como en la Proposición 7. Supongamos que $P \ne 0$. Entonces $\|P\| = 1$.*

10 Corolario. *Sean H, S, P como en la proposición anterior. Pongamos $Q = I - P$. Entonces*

$$Q^2 = Q, \qquad Q(H) = S^\perp, \qquad \ker(Q) = S.$$

11 Ejercicio. En $\mathbb{C}^2$ consideremos los vectores

$$a := e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b := \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Verificar si $P_{\ell(a)} P_{\ell(b)}$ coincide con $P_{\ell(b)} P_{\ell(a)}$. Se recomienda calcular las matrices de estos dos operadores o aplicar estos operadores al vector e_2.

12 Ejercicio. Sean S_1, S_2 subespacios cerrados de H. Demostrar que las siguientes tres condiciones son equivalentes:

- $S_1 \subseteq S_2$;
- $P_{S_1} P_{S_2} = P_{S_1}$;
- $P_{S_2} P_{S_1} = P_{S_1}$.