La proyección ortogonal sobre el subespacio unidimensional

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

7 de junio de 2022

Plan

Objetivos

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.

Objetivos

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.

Denotamos por S el subespacio vectorial de H generado por a.

Objetivos

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.

Denotamos por S el subespacio vectorial de H generado por a.

Vamos a definir el operador de la proyección ortogonal sobre S.

Objetivos

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.

Denotamos por S el subespacio vectorial de H generado por a.

Vamos a definir el operador de la proyección ortogonal sobre S.

Este operador se denota por P_a o por P_S.

Prerrequisitos

- El subespacio generado por un vector no nulo.
- El producto interno y sus propiedades básicas.
- El complemento ortogonal de un conjunto.

Plan

Repaso: el subespacio generado por un vector no nulo

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $a \in V$, $a \neq 0_V$.

Denotemos por $\operatorname{lin}(a)$ el conjunto de las combinaciones lineales del vector a:

$$\operatorname{lin}(a) := \{v \in V: \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad v = \lambda a\}.$$

Repaso: el subespacio generado por un vector no nulo

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $a \in V$, $a \neq 0_V$.

Denotemos por $\operatorname{lin}(a)$ el conjunto de las combinaciones lineales del vector a:

$$\operatorname{lin}(a) := \{v \in V: \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad v = \lambda a\}.$$

En otras palabras, $\operatorname{lin}(a)$ consiste de todos los múltiplos complejos del vector a:

$$\operatorname{lin}(a) = \mathbb{C}a.$$

Repaso: el subespacio generado por un vector no nulo

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $a \in V$, $a \neq 0_V$.

Denotemos por $\operatorname{lin}(a)$ el conjunto de las combinaciones lineales del vector a:

$$\operatorname{lin}(a) := \{v \in V : \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad v = \lambda a\}.$$

En otras palabras, $\operatorname{lin}(a)$ consiste de todos los múltiplos complejos del vector a:

$$\operatorname{lin}(a) = \mathbb{C}a.$$

Es el subespacio mínimo de V que contiene al vector a.

Repaso: subespacios unidimensionales de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial complejo.

Repaso: subespacios unidimensionales de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial complejo.

Sean $a \in V \setminus \{0_V\}$, $S := \mathrm{lin}(a)$.

Repaso: subespacios unidimensionales de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial complejo.

Sean $a \in V \setminus \{0_V\}$, $S := \operatorname{lin}(a)$.

Entonces la lista de un elemento a es una base ordenada de S, así que

$$\dim(S) = 1.$$

Repaso: subespacios unidimensionales de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial complejo.

Sean $a \in V \setminus \{0_V\}$, $S := \operatorname{lin}(a)$.

Entonces la lista de un elemento a es una base ordenada de S, así que

$$\dim(S) = 1.$$

Al revés, si S es un subespacio de V de dimensión 1,
entonces existe a en $V \setminus \{0_V\}$ tal que $S = \operatorname{lin}(a)$.

Repaso: productos internos en un espacio vectorial complejo

Sea H un espacio vectorial complejo.

Repaso: productos internos en un espacio vectorial complejo

Sea H un espacio vectorial complejo.

Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama producto interno en H si

Repaso: productos internos en un espacio vectorial complejo

Sea H un espacio vectorial complejo.

Una función $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama producto interno en H si

1) es lineal respecto al primer argumento,

Repaso: productos internos en un espacio vectorial complejo

Sea H un espacio vectorial complejo.

Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ se llama producto interno en H si

1) es lineal respecto al primer argumento,

2) el lineal conjugada respecto al segundo argumento,

Repaso: productos internos en un espacio vectorial complejo

Sea H un espacio vectorial complejo.

Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama producto interno en H si

1) es lineal respecto al primer argumento,

2) el lineal conjugada respecto al segundo argumento,

3) es hermítica: $\quad \forall a, b \in H \quad \langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}$,

Repaso: productos internos en un espacio vectorial complejo

Sea H un espacio vectorial complejo.

Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama producto interno en H si

1) es lineal respecto al primer argumento,

2) el lineal conjugada respecto al segundo argumento,

3) es hermítica: $\quad \forall a, b \in H \quad \langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}$,

4) es positiva definida: $\quad \forall a \in H \setminus \{0_H\} \quad \langle a, a \rangle > 0$.

Repaso: productos internos en un espacio vectorial complejo

Sea H un espacio vectorial complejo.

Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama producto interno en H si

1) es lineal respecto al primer argumento,

2) el lineal conjugada respecto al segundo argumento,

3) es hermítica: $\quad \forall a, b \in H \quad \langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}$,

4) es positiva definida: $\quad \forall a \in H \setminus \{0_H\} \quad \langle a, a \rangle > 0$.

La propiedad 2) se puede omitir porque se sigue de

Repaso: productos internos en un espacio vectorial complejo

Sea H un espacio vectorial complejo.

Una función $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama producto interno en H si

1) es lineal respecto al primer argumento,
2) el lineal conjugada respecto al segundo argumento,
3) es hermítica: $\forall a, b \in H \quad \langle b, a\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$,
4) es positiva definida: $\forall a \in H \setminus \{0_H\} \quad \langle a, a\rangle > 0$.

La propiedad 2) se puede omitir porque se sigue de 1) y 3).

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dado $X \subseteq H$,

$$X^{\perp} := \{v \in H\colon \quad v \perp X\},$$

esto es,

$$X^{\perp} := \{v \in H\colon \quad \forall x \in X \quad v \perp x\}.$$

Repaso: la propiedad decreciente del complemento ortogonal

Proposición

Sean $X, Y \subseteq H$, $X \subseteq Y$. Entonces

Repaso: la propiedad decreciente del complemento ortogonal

Proposición

Sean $X, Y \subseteq H$, $X \subseteq Y$. Entonces
$$Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}.$$

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto unipuntual

Proposición

Sea $a \in H$ y sea $S \coloneqq \operatorname{lin}(a)$. Entonces

$$\{a\}^{\perp} = S^{\perp}.$$

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto unipuntual

Proposición

Sea $a \in H$ y sea $S := \operatorname{lin}(a)$. Entonces

$$\{a\}^\perp = S^\perp.$$

Demostración.

Como $\{a\} \subseteq S$, obtenemos $S^\perp \subseteq \{a\}^\perp$.

Sea $v \in \{a\}^\perp$ y sea $x \in S$.

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto unipuntual

Proposición

Sea $a \in H$ y sea $S := \operatorname{lin}(a)$. Entonces

$$\{a\}^\perp = S^\perp.$$

Demostración.

Como $\{a\} \subseteq S$, obtenemos $S^\perp \subseteq \{a\}^\perp$.

Sea $v \in \{a\}^\perp$ y sea $x \in S$. Entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \lambda a$.

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto unipuntual

Proposición

Sea $a \in H$ y sea $S := \operatorname{lin}(a)$. Entonces

$$\{a\}^\perp = S^\perp.$$

Demostración.

Como $\{a\} \subseteq S$, obtenemos $S^\perp \subseteq \{a\}^\perp$.

Sea $v \in \{a\}^\perp$ y sea $x \in S$. Entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \lambda a$. Luego

$$\langle v, x \rangle =$$

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto unipuntual

Proposición

Sea $a \in H$ y sea $S \coloneqq \operatorname{lin}(a)$. Entonces

$$\{a\}^\perp = S^\perp.$$

Demostración.

Como $\{a\} \subseteq S$, obtenemos $S^\perp \subseteq \{a\}^\perp$.

Sea $v \in \{a\}^\perp$ y sea $x \in S$. Entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \lambda a$. Luego

$$\langle v, x \rangle = \langle v, \lambda a \rangle =$$

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto unipuntual

Proposición

Sea $a \in H$ y sea $S \coloneqq \operatorname{lin}(a)$. Entonces

$$\{a\}^{\perp} = S^{\perp}.$$

Demostración.

Como $\{a\} \subseteq S$, obtenemos $S^{\perp} \subseteq \{a\}^{\perp}$.

Sea $v \in \{a\}^{\perp}$ y sea $x \in S$. Entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \lambda a$. Luego

$$\langle v, x \rangle = \langle v, \lambda a \rangle = \overline{\lambda} \, \langle v, a \rangle =$$

Repaso: el complemento ortogonal de un conjunto unipuntual

Proposición

Sea $a \in H$ y sea $S := \operatorname{lin}(a)$. Entonces

$$\{a\}^\perp = S^\perp.$$

Demostración.

Como $\{a\} \subseteq S$, obtenemos $S^\perp \subseteq \{a\}^\perp$.

Sea $v \in \{a\}^\perp$ y sea $x \in S$. Entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \lambda a$. Luego

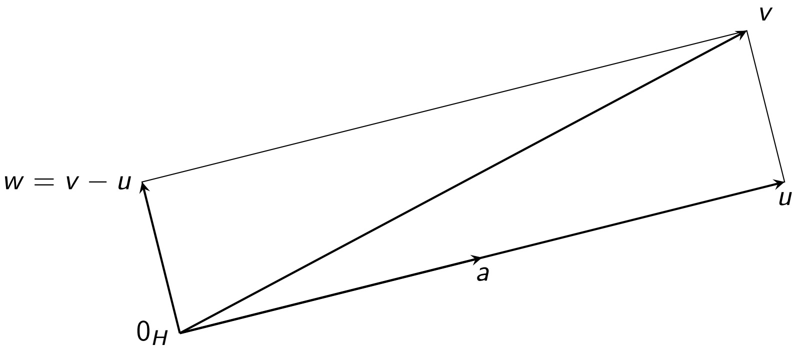
$$\langle v, x \rangle = \langle v, \lambda a \rangle = \overline{\lambda} \langle v, a \rangle = 0.$$

Plan

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$. Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Sea $v \in H$. Entonces

$$\exists!\ u \in S \qquad v - u \in S^{\perp}.$$



Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^{\perp}$.

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^{\perp}$.

Como $u \in \text{lin}(a)$,

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^{\perp}$.

Como $u \in \operatorname{lin}(a)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^{\perp}$.

Como $u \in \text{lin}(a)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Como $v - u \perp a$,

$$0 = \langle v - u, a \rangle$$

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^{\perp}$.

Como $u \in \mathrm{lin}(a)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Como $v - u \perp a$,

$$0 = \langle v - u, a \rangle =$$

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^{\perp}$.

Como $u \in \mathrm{lin}(a)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Como $v - u \perp a$,

$$0 = \langle v - u, a \rangle = \langle v - \lambda a, a \rangle$$

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^{\perp}$.

Como $u \in \operatorname{lin}(a)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Como $v - u \perp a$,

$$0 = \langle v - u, a \rangle = \langle v - \lambda a, a \rangle =$$

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^\perp$.

Como $u \in \operatorname{lin}(a)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Como $v - u \perp a$,

$$0 = \langle v - u, a \rangle = \langle v - \lambda a, a \rangle = \langle v, a \rangle - \lambda \langle a, a \rangle.$$

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^\perp$.

Como $u \in \operatorname{lin}(a)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Como $v - u \perp a$,

$$0 = \langle v - u, a \rangle = \langle v - \lambda a, a \rangle = \langle v, a \rangle - \lambda \langle a, a \rangle.$$

Por lo tanto, λ debe de ser

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^{\perp}$.

Como $u \in \mathrm{lin}(a)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Como $v - u \perp a$,

$$0 = \langle v - u, a \rangle = \langle v - \lambda a, a \rangle = \langle v, a \rangle - \lambda \langle a, a \rangle.$$

Por lo tanto, λ debe de ser $\lambda = \dfrac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}$.

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^{\perp}$.

Como $u \in \mathrm{lin}(a)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Como $v - u \perp a$,

$$0 = \langle v - u, a \rangle = \langle v - \lambda a, a \rangle = \langle v, a \rangle - \lambda \langle a, a \rangle.$$

Por lo tanto, λ debe de ser $\lambda = \dfrac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}$.

Hemos mostrado que u se determina por a y v de manera única:

$$u =$$

Unicidad de u

Supongamos que $u \in S$ y $v - u \in S^\perp$.

Como $u \in \text{lin}(a)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Como $v - u \perp a$,

$$0 = \langle v - u, a \rangle = \langle v - \lambda a, a \rangle = \langle v, a \rangle - \lambda \langle a, a \rangle.$$

Por lo tanto, λ debe de ser $\lambda = \dfrac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}$.

Hemos mostrado que u se determina por a y v de manera única:

$$u = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a.$$

Existencia de u

Existencia de u

$$\lambda :=$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle},$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u :=$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

$$\langle v - u, a\rangle$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

$$\langle v - u, a\rangle =$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

$$\langle v - u, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

$$\langle v - u, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle =$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

$$\langle v - u, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

$$\langle v - u, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle =$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

$$\langle v - u, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\,\langle a, a\rangle$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

$$\langle v - u, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\,\langle a, a\rangle =$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

$$\langle v - u, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\,\langle a, a\rangle = 0.$$

Existencia de u

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a.$$

Por la construcción,

$$u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Probemos que $v - u \perp a$.

$$\langle v - u, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\,\langle a, a\rangle = 0.$$

Como $S^\perp = \{a\}^\perp$, hemos demostrado que $v - u \in S^\perp$.

Otra forma de la proposición demostrada

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H \setminus \{0_H\}$. Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Sea $v \in H$. Entonces

$$\exists!\ (u, w) \in S \times S^{\perp} \qquad v = u + w.$$

Otra forma de la proposición demostrada

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H \setminus \{0_H\}$. Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Sea $v \in H$. Entonces

$$\exists!\ (u, w) \in S \times S^{\perp} \qquad v = u + w.$$

Fórmulas explícitas para calcular u y w:

$$\lambda :=$$

Otra forma de la proposición demostrada

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H \setminus \{0_H\}$. Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Sea $v \in H$. Entonces

$$\exists!\ (u, w) \in S \times S^{\perp} \qquad v = u + w.$$

Fórmulas explícitas para calcular u y w:

$$\lambda := \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle},$$

Otra forma de la proposición demostrada

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H \setminus \{0_H\}$.
Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Sea $v \in H$. Entonces

$$\exists!\ (u, w) \in S \times S^{\perp} \qquad v = u + w.$$

Fórmulas explícitas para calcular u y w:

$$\lambda := \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}, \qquad u :=$$

Otra forma de la proposición demostrada

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H \setminus \{0_H\}$. Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Sea $v \in H$. Entonces

$$\exists!\ (u, w) \in S \times S^{\perp} \qquad v = u + w.$$

Fórmulas explícitas para calcular u y w:

$$\lambda := \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}, \qquad u := \lambda a,$$

Otra forma de la proposición demostrada

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H \setminus \{0_H\}$. Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Sea $v \in H$. Entonces

$$\exists!\ (u, w) \in S \times S^{\perp} \qquad v = u + w.$$

Fórmulas explícitas para calcular u y w:

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a, \qquad w :=$$

Otra forma de la proposición demostrada

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H \setminus \{0_H\}$. Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Sea $v \in H$. Entonces

$$\exists!\ (u, w) \in S \times S^{\perp} \qquad v = u + w.$$

Fórmulas explícitas para calcular u y w:

$$\lambda := \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := v - \lambda a.$$

Otra forma de la proposición demostrada: la descomposición del espacio en la suma directa de S y $S^\perp$

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H \setminus \{0_H\}$.

Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S.

Entonces H es la suma directa de S y $S^\perp$.

Otra forma de la proposición demostrada: la descomposición del espacio en la suma directa de S y $S^\perp$

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H \setminus \{0_H\}$.

Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S.

Entonces H es la suma directa de S y $S^\perp$.

Algunos autores denotan la suma directa con $\dot{+}$, algunos con $\oplus$.

El caso $a = 0_H$

Ejercicio. Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a = 0_H$. Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Sea $v \in H$. Demostrar que

$$\exists!\ u \in S \qquad v - u \in S^{\perp}.$$

El caso $a = 0_H$

Ejercicio. Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a = 0_H$. Denotemos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Sea $v \in H$. Demostrar que

$$\exists!\ u \in S \qquad v - u \in S^{\perp}.$$

Notamos que en este caso la fórmula para u no es la misma que en el caso $a \neq 0_H$.

Plan

Definición del operador P_a

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.

Definición del operador P_a

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.

Definimos $P_a \colon H \to H$,

$$\boxed{P_a(v) := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a.}$$

Denotamos $\operatorname{lin}(a)$ por S.

Definición del operador P_a

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.

Definimos $P_a \colon H \to H$,

$$\boxed{P_a(v) := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a.}$$

Denotamos $\mathrm{lin}(a)$ por S. Por la proposición,

$$\forall v \in H$$

Definición del operador P_a

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.

Definimos $P_a \colon H \to H$,

$$\boxed{P_a(v) := \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a.}$$

Denotamos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Por la proposición,

$$\forall v \in H \qquad P_a(v) \in$$

Definición del operador P_a

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.

Definimos $P_a \colon H \to H$,

$$\boxed{P_a(v) := \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a.}$$

Denotamos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Por la proposición,

$$\forall v \in H \qquad P_a(v) \in S, \qquad v - P_a(v) \in$$

Definición del operador P_a

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.
Definimos $P_a \colon H \to H$,

$$\boxed{P_a(v) := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a.}$$

Denotamos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Por la proposición,

$$\forall v \in H \qquad P_a(v) \in S, \qquad v - P_a(v) \in S^{\perp}.$$

Definición del operador P_a

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$. Definimos $P_a \colon H \to H$,

$$\boxed{P_a(v) := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a.}$$

Denotamos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Por la proposición,

$$\forall v \in H \qquad P_a(v) \in S, \qquad v - P_a(v) \in S^{\perp}.$$

Además, P_a es lineal:

Definición del operador P_a

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.
Definimos $P_a\colon H \to H$,

$$\boxed{P_a(v) := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a.}$$

Denotamos $\operatorname{lin}(a)$ por S. Por la proposición,

$$\forall v \in H \qquad P_a(v) \in S, \qquad v - P_a(v) \in S^{\perp}.$$

Además, P_a es lineal:

$$P_a(x + \xi y) = \frac{\langle x + \xi y, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{\langle x, a\rangle + \xi\langle y, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = P_a(x) + \xi P_a(y).$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$.

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x =$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) =$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \iff \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$.

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$. Luego

$$P_a(x)$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$. Luego

$$P_a(x) =$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$. Luego

$$P_a(x) = \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$. Luego

$$P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a =$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$. Luego

$$P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{\xi\, \langle a, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$. Luego

$$P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{\xi\, \langle a, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a =$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$. Luego

$$P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{\xi\,\langle a, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \xi a$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$. Luego

$$P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{\xi\, \langle a, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \xi a =$$

Proposición (los puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \iff \qquad x \in S.$$

$\Longrightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\Longleftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$. Luego

$$P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{\xi\, \langle a, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \xi a = x.$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$.

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$.

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

y

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y =$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a)$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) =$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\supseteq$. Sea $x \in S$.

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \mathrm{lin}(a) = S.$$

$\supseteq$. Sea $x \in S$. Entonces x

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\supseteq$. Sea $x \in S$. Entonces $x =$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\supseteq$. Sea $x \in S$. Entonces $x = P_a(x)$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\supseteq$. Sea $x \in S$. Entonces $x = P_a(x) \in$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a[H]$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

$\supseteq$. Sea $x \in S$. Entonces $x = P_a(x) \in P_a[H]$.

Proposición (la propiedad idempotente de P_a)

$$P_a^2 = P_a.$$

Proposición (la propiedad idempotente de P_a)

$$P_a^2 = P_a.$$

Demostración.

Proposición (la propiedad idempotente de P_a)

$$P_a^2 = P_a.$$

Demostración.

Sea $v \in H$.

Proposición (la propiedad idempotente de P_a)

$$P_a^2 = P_a.$$

Demostración.

Sea $v \in H$.

Entonces $P_a v \in$

Proposición (la propiedad idempotente de P_a)

$$P_a^2 = P_a.$$

Demostración.

Sea $v \in H$.

Entonces $P_a v \in S$.

Proposición (la propiedad idempotente de P_a)

$$P_a^2 = P_a.$$

Demostración.

Sea $v \in H$.

Entonces $P_a v \in S$.

Luego $P_a v$ es un punto fijo de P_a:

$$P_a(P_a v)$$

Proposición (la propiedad idempotente de P_a)

$$P_a^2 = P_a.$$

Demostración.

Sea $v \in H$.

Entonces $P_a v \in S$.

Luego $P_a v$ es un punto fijo de P_a:

$$P_a(P_a v) =$$

Proposición (la propiedad idempotente de P_a)

$$P_a^2 = P_a.$$

Demostración.

Sea $v \in H$.

Entonces $P_a v \in S$.

Luego $P_a v$ es un punto fijo de P_a:

$$P_a(P_a v) = P_a v.$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y \rangle = \langle x, P_a y \rangle.$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y \rangle = \langle x, P_a y \rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y \rangle$.

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y \rangle = \langle x, P_a y \rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y \rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y \rangle$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle =$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y)\rangle$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y \rangle = \langle x, P_a y \rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y \rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y \rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y) \rangle =$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y)\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{P_a x}_{\in S}, \underbrace{y - P_a y}_{\in S^\perp}\rangle$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y)\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{P_a x}_{\in S}, \underbrace{y - P_a y}_{\in S^\perp}\rangle =$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y)\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{P_a x}_{\in S}, \underbrace{y - P_a y}_{\in S^\perp}\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle.$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y)\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{P_a x}_{\in S}, \underbrace{y - P_a y}_{\in S^\perp}\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle.$$

Transformamos el lado derecho:

$$\langle x, P_a y\rangle$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y)\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{P_a x}_{\in S}, \underbrace{y - P_a y}_{\in S^\perp}\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle.$$

Transformamos el lado derecho:

$$\langle x, P_a y\rangle =$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y)\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{P_a x}_{\in S}, \underbrace{y - P_a y}_{\in S^\perp}\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle.$$

Transformamos el lado derecho:

$$\langle x, P_a y\rangle = \langle P_a x + (x - P_a x), P_a y\rangle$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y)\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{P_a x}_{\in S}, \underbrace{y - P_a y}_{\in S^\perp}\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle.$$

Transformamos el lado derecho:

$$\langle x, P_a y\rangle = \langle P_a x + (x - P_a x), P_a y\rangle =$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y)\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{P_a x}_{\in S}, \underbrace{y - P_a y}_{\in S^\perp}\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle.$$

Transformamos el lado derecho:

$$\langle x, P_a y\rangle = \langle P_a x + (x - P_a x), P_a y\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{x - P_a x}_{\in S^\perp}, \underbrace{P_a y}_{\in S}\rangle$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y \rangle = \langle x, P_a y \rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y \rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y \rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y) \rangle = \langle P_a x, P_a y \rangle + \langle \underbrace{P_a x}_{\in S}, \underbrace{y - P_a y}_{\in S^\perp} \rangle = \langle P_a x, P_a y \rangle.$$

Transformamos el lado derecho:

$$\langle x, P_a y \rangle = \langle P_a x + (x - P_a x), P_a y \rangle = \langle P_a x, P_a y \rangle + \langle \underbrace{x - P_a x}_{\in S^\perp}, \underbrace{P_a y}_{\in S} \rangle =$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Mostremos que ambos lados son iguales a $\langle P_a x, P_a y\rangle$.

Transformamos el lado izquierdo:

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle P_a x, P_a y + (y - P_a y)\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{P_a x}_{\in S}, \underbrace{y - P_a y}_{\in S^\perp}\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle.$$

Transformamos el lado derecho:

$$\langle x, P_a y\rangle = \langle P_a x + (x - P_a x), P_a y\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle + \langle \underbrace{x - P_a x}_{\in S^\perp}, \underbrace{P_a y}_{\in S}\rangle = \langle P_a x, P_a y\rangle.$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$, $\langle a, b \rangle = b^* a$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\xi a = a \xi$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$, $\langle a, b\rangle = b^* a$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{un escalar por un vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$, $\langle a, b \rangle = b^* a$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{un escalar por un vector} \rightarrow \quad \xi a = a \xi \quad \leftarrow \text{una matriz } n \times 1 \text{ por una matriz } 1 \times 1.$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$, $\langle a, b \rangle = b^* a$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{un escalar por un vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{una matriz } n \times 1 \text{ por una matriz } 1 \times 1.$$

Luego

$$P_a(v) = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$, $\langle a, b \rangle = b^* a$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{un escalar por un vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{una matriz } n \times 1 \text{ por una matriz } 1 \times 1.$$

Luego

$$P_a(v) = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a = \frac{1}{\langle a, a \rangle}\, ((a^* v)\, a)$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$, $\langle a, b \rangle = b^* a$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{un escalar por un vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{una matriz } n \times 1 \text{ por una matriz } 1 \times 1.$$

Luego

$$P_a(v) = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a = \frac{1}{\langle a, a \rangle}\, ((a^* v)\ a) = \frac{1}{\langle a, a \rangle}\, (a(a^* v))$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$, $\langle a, b \rangle = b^* a$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{un escalar por un vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{una matriz } n \times 1 \text{ por una matriz } 1 \times 1.$$

Luego

$$P_a(v) = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a = \frac{1}{\langle a, a \rangle}\, ((a^* v)\; a) = \frac{1}{\langle a, a \rangle}\, (a(a^* v))$$
$$= \frac{1}{\langle a, a \rangle}\, ((a a^* v))$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$, $\langle a, b\rangle = b^* a$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{un escalar por un vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{una matriz } n \times 1 \text{ por una matriz } 1 \times 1.$$

Luego

$$P_a(v) = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, ((a^* v)\, a) = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, (a(a^* v))$$
$$= \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, ((aa^* v)) = \left(\frac{1}{\langle a, a\rangle}\, aa^*\right) v.$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$, $\langle a, b\rangle = b^* a$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{un escalar por un vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{una matriz } n \times 1 \text{ por una matriz } 1 \times 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} P_a(v) &= \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, ((a^* v)\, a) = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, (a(a^* v)) \\ &= \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, ((a a^* v)) = \left(\frac{1}{\langle a, a\rangle}\, a a^*\right) v. \end{aligned}$$

En los últimos dos pasos usamos la asociatividad de la multiplicación de matrices.

El caso $H = \mathbb{C}^n$

Hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición

Si $a \in \mathbb{C}^n$, $a \neq 0_n$, entonces la matriz asociada al operador P_a es

$$\frac{1}{a^* a}\; a\, a^*,$$

esto es,

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \dots & \overline{a_n} \end{bmatrix}.$$

Plan

En todos los ejercicios suponemos que

- H es un espacio vectorial complejo con un producto interno,
- $a \in H$, $a \neq 0_H$,
- $S = \mathrm{lin}(a)$.

Ejercicio. Encontrar el núcleo de P_a:

$$\ker(P_a) = ?.$$

La proyección complementaria

Sea $Q_a := I - P_a$.

Ejercicio. Demostrar que

$$Q_a^2 = Q_a.$$

Ejercicio. Encontrar el núcleo y la imagen de Q_a:

$$\ker(Q_a) = ?, \qquad \operatorname{im}(Q_a) = ?.$$

¿Cómo se cambia P_a cuando dilatamos el vector a?

¿Cómo se cambia P_a cuando dilatamos el vector a?

Ejercicio. Sea $\xi \in \mathbb{C}$, $\xi \neq 0$. Demostrar que

$$P_{\xi a} = P_a.$$

¿Cómo se cambia P_a cuando dilatamos el vector a?

Ejercicio. Sea $\xi \in \mathbb{C}$, $\xi \neq 0$. Demostrar que

$$P_{\xi a} = P_a.$$

En otras palabras, si $b \in H$ y $\operatorname{lin}(b) = \operatorname{lin}(a)$, entonces

$$P_b = P_a.$$

Un ejemplo numérico

Ejercicio. Encontrar la matriz P_a y los vectores $u = P_a v$, $w = v - u$, si

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Hacer comprobaciones:

$$P_a^2 = P_a, \qquad P_a^* = P_a, \qquad w \perp a, \qquad \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle = \langle v, v \rangle.$$

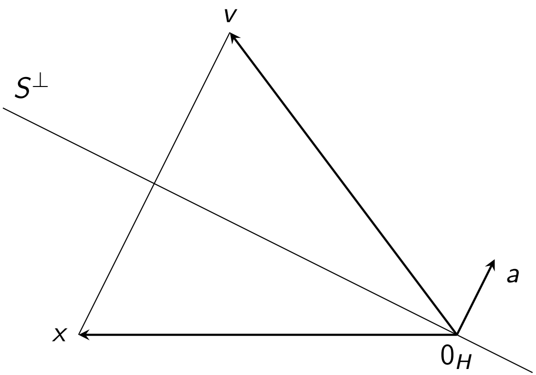
Código en Sagemath

```
def orth_proj_over_vector(a, v):
    return (v.dot_product(a) / a.dot_product(a)) * a

def test_orth_proj():
    n = 4; a1 = random_vector(CDF, n); v1 = random_vector(CDF, n)
    u1 = orth_proj_over_vector(a1, v1); w1 = v1 - u1
    u1u1 = u1.dot_product(u1); w1w1 = w1.dot_product(w1)
    v1v1 = v1.dot_product(v1); w1a1 = w1.dot_product(a1)
    print(a1); print(v1); print(w1a1); print(u1u1+w1w1); print(v1v1)

test_orth_proj()
```

Reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio



Ejercicio.

Sean $a \in H$, $a \neq 0_H$, $v \in H$.

Pongamos $S := \operatorname{lin}(a)$.

Encontrar $x \in H$ tal que

$$x - v \in S,$$

$$\frac{1}{2}(v + x) \in S^\perp.$$

Si denotamos x por $R_a(v)$,

¿qué propiedades tiene R_a?