Proyecciones ortogonales sobre subespacios unidimensionales

Egor Maximenko
http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

2 de diciembre de 2020

Plan

Objetivos

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

Dado un vector $a \in H$, $a \neq 0_H$, vamos a definir el operador P_a
de la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathrm{lin}(a)$ generado por a.

Prerrequisitos

- El subespacio generado por un vector no nulo.
- El producto interno y sus propiedades básicas.
- El complemento ortogonal de un conjunto.

Plan

1. Introducción
2. Herramientas auxiliares
3. Descomposición $H = S + S^{\perp}$, $S = \mathrm{lin}(a)$
4. Operador P_a
5. Ejercicios

El subespacio generado por un vector no nulo (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $a \in V$, $a \neq \{0_V\}$.

Denotemos por $\operatorname{lin}(a)$ el conjunto de las combinaciones lineales del vector a:

$$\operatorname{lin}(a) := \{v \in V : \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad v = \lambda a\}.$$

El subespacio generado por un vector no nulo (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $a \in V$, $a \neq \{0_V\}$.

Denotemos por $\text{lin}(a)$ el conjunto de las combinaciones lineales del vector a:

$$\text{lin}(a) := \{v \in V: \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad v = \lambda a\}.$$

En otras palabras, $\text{lin}(a)$ consiste de los múltiplos complejos del vector a:

$$\text{lin}(a) = \mathbb{C}a.$$

El subespacio generado por un vector no nulo (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $a \in V$, $a \neq \{0_V\}$.

Denotemos por $\operatorname{lin}(a)$ el conjunto de las combinaciones lineales del vector a:

$$\operatorname{lin}(a) := \{v \in V : \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad v = \lambda a\}.$$

En otras palabras, $\operatorname{lin}(a)$ consiste de los múltiplos complejos del vector a:

$$\operatorname{lin}(a) = \mathbb{C}a.$$

Es el subespacio mínimo de V que contiene al vector a.

Subespacios unidimensionales de un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo.

Subespacios unidimensionales de un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo.

Si $a \in V$, $a \neq \{0_V\}$, $S := \operatorname{lin}(a)$.
Entonces la lista de un elemento a es una base ordenada de S, así que

$$\dim(S) = 1.$$

Subespacios unidimensionales de un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo.

Si $a \in V$, $a \neq \{0_V\}$, $S := \operatorname{lin}(a)$.
Entonces la lista de un elemento a es una base ordenada de S, así que

$$\dim(S) = 1.$$

Al revés, si S es un subespacio de V de dimensión 1,
entonces existe a en V tal que $a \neq \{0_V\}$ y $S = \operatorname{lin}(a)$.

Productos internos en un espacio vectorial complejo (repaso)

Sea H un espacio vectorial complejo.

Una función $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama producto interno en H si

1) es lineal respecto al primer argumento,
2) el lineal conjugada respecto al segundo argumento,
3) es hermítica: $\forall a, b \in H \quad \langle b, a\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$,
4) es positiva definida: $\forall a \in H \setminus \{0_H\} \quad \langle a, a\rangle > 0$.

Productos internos en un espacio vectorial complejo (repaso)

Sea H un espacio vectorial complejo.

Una función $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama producto interno en H si

1) es lineal respecto al primer argumento,
2) el lineal conjugada respecto al segundo argumento,
3) es hermítica: $\forall a, b \in H \quad \langle b, a\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$,
4) es positiva definida: $\forall a \in H \setminus \{0_H\} \quad \langle a, a\rangle > 0$.

La propiedad 2) se puede omitir porque se sigue de 1) y 3).

El complemento ortogonal de un conjunto (repaso)

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

El complemento ortogonal de un conjunto (repaso)

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dado $X \subseteq H$,

$$X^\perp := \{v \in H : \quad v \perp X\},$$

esto es,

$$X^\perp := \{v \in H : \quad \forall x \in X \quad v \perp x\}.$$

El complemento ortogonal de un conjunto (repaso)

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dado $X \subseteq H$,

$$X^\perp := \{v \in H : \quad v \perp X\},$$

esto es,

$$X^\perp := \{v \in H : \quad \forall x \in X \quad v \perp x\}.$$

Propiedad monótona (decreciente) del complemento ortogonal:
si $X \subseteq Y$, entonces $Y^\perp \subseteq X^\perp$.

El complemento ortogonal de un conjunto unipuntual (repaso)

Sea $a \in H$ y sea $S := \operatorname{lin}(a)$. Entonces

$$\{a\}^\perp = S^\perp.$$

Demostración.

Como $\{a\} \subseteq S$, por la propiedad decreciente de $\perp$ tenemos $S^\perp \subseteq \{a\}^\perp$.

Sea $v \in \{a\}^\perp$ y sea $x \in S$.
Entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \lambda a$. Luego

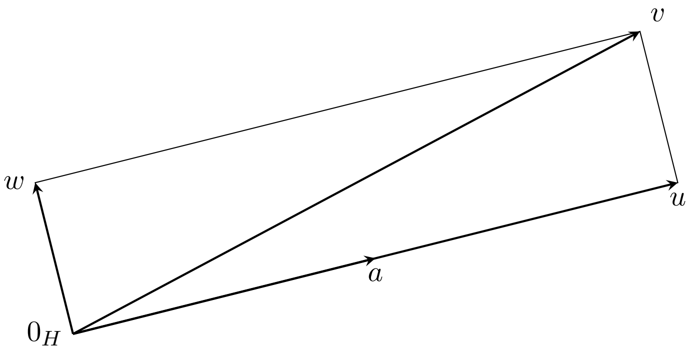
$$\langle v, x\rangle = \langle v, \lambda a\rangle = \lambda \langle v, a\rangle = 0.$$

Plan

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$. Denotemos $\mathrm{lin}(a)$ por S. Entonces

$$\exists!\ (u, w) \in S \times S^{\perp} \qquad v = u + w.$$



Unicidad de (u, w)

Supongamos que $u \in S$, $w \in S^{\perp}$, $v = u + w$.

Unicidad de (u, w)

Supongamos que $u \in S$, $w \in S^{\perp}$, $v = u + w$.

Entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

Unicidad de (u, w)

Supongamos que $u \in S$, $w \in S^{\perp}$, $v = u + w$.

Entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

De la igualdad $v = u + w$ obtenemos $w = v - \lambda a$.

Unicidad de (u, w)

Supongamos que $u \in S$, $w \in S^\perp$, $v = u + w$.

Entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

De la igualdad $v = u + w$ obtenemos $w = v - \lambda a$. Como $w \perp a$,

$$0 = \langle w, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle.$$

Unicidad de (u, w)

Supongamos que $u \in S$, $w \in S^\perp$, $v = u + w$.

Entonces existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $u = \lambda a$.

De la igualdad $v = u + w$ obtenemos $w = v - \lambda a$. Como $w \perp a$,

$$0 = \langle w, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle.$$

$$\lambda = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}.$$

Hemos mostrado que u y w se determinan por a y v de manera única:

$$u = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a, \qquad w = v - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}.$$

Existencia de (u, w)

Existencia de (u, w)

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := v - \lambda a.$$

Existencia de (u, w)

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := v - \lambda a.$$

Verifiquemos que $u \in S$, $w \in S^{\perp}$, $v = u + w$.

Existencia de (u, w)

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := v - \lambda a.$$

Verifiquemos que $u \in S$, $w \in S^\perp$, $v = u + w$.

- $u = \lambda a \in \operatorname{lin}(a) = S$

Existencia de (u, w)

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := v - \lambda a.$$

Verifiquemos que $u \in S$, $w \in S^{\perp}$, $v = u + w$.

- $u = \lambda a \in \mathrm{lin}(a) = S$
- $u + w = (\lambda a) + (v - \lambda a) = v.$

Existencia de (u, w)

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := v - \lambda a.$$

Verifiquemos que $u \in S$, $w \in S^\perp$, $v = u + w$.

- $u = \lambda a \in \mathrm{lin}(a) = S$
- $u + w = (\lambda a) + (v - \lambda a) = v.$
- Probemos que $w \perp a$:

$$\langle w, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\,\langle a, a\rangle = 0.$$

Existencia de (u, w)

$$\lambda := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := v - \lambda a.$$

Verifiquemos que $u \in S$, $w \in S^\perp$, $v = u + w$.

- $u = \lambda a \in \mathrm{lin}(a) = S$
- $u + w = (\lambda a) + (v - \lambda a) = v$.
- Probemos que $w \perp a$:

$$\langle w, a\rangle = \langle v - \lambda a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = \langle v, a\rangle - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\langle a, a\rangle = 0.$$

- Como $S^\perp = \{a\}^\perp$, hemos demostrado que $w \in S^\perp$.

Plan

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno, y sea $a \in H$, $a \neq 0_H$.
Definimos $P_a \colon H \to H$,

$$P_a(v) := \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a.$$

Denotamos $\operatorname{lin}(a)$ por S.
La proposición anterior implica que para cada v en H,

$$P_a(v) \in S, \qquad v - P_a(v) \in S^\perp.$$

Además, P_a es lineal:

$$P_a(x + \xi y) = \frac{\langle x + \xi y, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{\langle x, a\rangle + \xi \langle y, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = P_a(x) + \xi P_a(y).$$

Proposición (puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

Proposición (puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Rightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Proposición (puntos fijos de P_a)

$$P_a(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in S.$$

$\Rightarrow$. Supongamos que $P_a(x) = x$. Entonces

$$x = P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \text{lin}(a) = S.$$

$\Leftarrow$. Sea $x \in S$. Entonces existe ξ en $\mathbb{C}$ tal que $x = \xi a$. Luego

$$P_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{\xi\, \langle a, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \xi a = x.$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a(H)$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \operatorname{lin}(a) = S.$$

Proposición (la imagen de P_a)

$$P_a[H] = S.$$

$\subseteq$. Sea $y \in P_a(H)$. Entonces existe v en H tal que $y = P_a(v)$. Luego

$$y = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \in \text{lin}(a) = S.$$

$\supseteq$. Sea $x \in S$. Entonces $x = P_a(x) \in P_a[H]$.

Proposición (la propiedad idempotente de P_a)

$$P_a^2 = P_a.$$

Proposición (la propiedad idempotente de P_a)

$$P_a^2 = P_a.$$

Demostración. Sea $v \in H$. Entonces $P_a v \in S$. Luego $P_a v$ es un punto fijo de P_a:

$$P_a(P_a v) = P_a v.$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Pongamos

$$u := P_a x, \qquad w := v - P_a x, \qquad f := P_a y, \qquad g := y - P_a y.$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y \rangle = \langle x, P_a y \rangle.$$

Demostración. Pongamos

$$u := P_a x, \qquad w := v - P_a x, \qquad f := P_a y, \qquad g := y - P_a y.$$

Entonces

$$\langle P_a x, y \rangle = \langle u, f + g \rangle = \langle u, f \rangle + \langle \underbrace{u}_{\in S}, \underbrace{g}_{\in S^\perp} \rangle = \langle u, f \rangle,$$

Proposición (la propiedad autoadjunta de P_a)

$$\forall x, y \in H \qquad \langle P_a x, y\rangle = \langle x, P_a y\rangle.$$

Demostración. Pongamos

$$u := P_a x, \qquad w := v - P_a x, \qquad f := P_a y, \qquad g := y - P_a y.$$

Entonces

$$\langle P_a x, y\rangle = \langle u, f + g\rangle = \langle u, f\rangle + \langle \underbrace{u}_{\in S}, \underbrace{g}_{\in S^\perp}\rangle = \langle u, f\rangle,$$

$$\langle x, P_a y\rangle = \langle u + w, f\rangle = \langle u, f\rangle + \langle \underbrace{w}_{\in S^\perp}, \underbrace{f}_{\in S}\rangle = \langle u, f\rangle.$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\xi a = a\xi$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{escalar por vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{escalar por vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{matriz } n \times 1 \text{ por matriz } 1 \times 1$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{escalar por vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{matriz } n \times 1 \text{ por matriz } 1 \times 1$$

Luego

$$P_a(v) = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{escalar por vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{matriz } n \times 1 \text{ por matriz } 1 \times 1$$

Luego

$$P_a(v) = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, \left((a^* v)\, a\right)$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{escalar por vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{matriz } n \times 1 \text{ por matriz } 1 \times 1$$

Luego

$$P_a(v) = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\,((a^* v)\ a) = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\,(a(a^* v))$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{escalar por vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{matriz } n \times 1 \text{ por matriz } 1 \times 1$$

Luego

$$P_a(v) = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, ((a^* v)\ a) = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, (a(a^* v))$$

$$= \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, ((aa^* v))$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{escalar por vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{matriz } n \times 1 \text{ por matriz } 1 \times 1$$

Luego

$$P_a(v) = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, ((a^* v)\ a) = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, (a(a^* v))$$
$$= \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, ((a a^* v)) = \left(\frac{1}{\langle a, a\rangle}\, a a^*\right) v.$$

Caso $H = \mathbb{C}^n$

Primero notemos que para cualquier a en $\mathbb{C}^n$ y cualquier ξ en $\mathbb{C}$,

$$\text{escalar por vector} \rightarrow \quad \xi a = a\xi \quad \leftarrow \text{matriz } n \times 1 \text{ por matriz } 1 \times 1$$

Luego

$$\begin{aligned} P_a(v) &= \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, ((a^* v)\, a) = \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, (a(a^* v)) \\ &= \frac{1}{\langle a, a\rangle}\, ((aa^* v)) = \left(\frac{1}{\langle a, a\rangle}\, aa^*\right) v. \end{aligned}$$

En los últimos dos pasos usamos la asociatividad de la multiplicación de matrices.

El caso $H = \mathbb{C}^n$

Hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición

Si $a \in \mathbb{C}^n$, $a \neq 0_n$, entonces la matriz asociada al operador P_a es

$$\frac{1}{a^* a}\, a\, a^*,$$

esto es,

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \ldots & \overline{a_n} \end{bmatrix}.$$

Plan

En todos los ejercicios suponemos que

- H es un espacio vectorial complejo con un producto interno,
- $a \in H$, $a \neq 0_H$,
- $S = \mathrm{lin}(a)$.

Ejercicio. Encontrar el núcleo de P_a:

$$\ker(P_a) = ?.$$

La proyección complementaria

Sea $Q_a := I - P_a$.

Ejercicio. Demostrar que

$$Q_a^2 = Q_a.$$

Ejercicio. Encontrar el núcleo y la imagen de Q_a:

$$\ker(Q_a) = ?, \qquad \mathrm{im}(Q_a) = ?.$$

¿Cómo se cambia P_a cuando estiramos el vector a?

¿Cómo se cambia P_a cuando estiramos el vector a?

Ejercicio. Sea $\xi \in \mathbb{C}$, $\xi \neq 0$. Demostrar que

$$P_{\xi a} = P_a.$$

¿Cómo se cambia P_a cuando estiramos el vector a?

Ejercicio. Sea $\xi \in \mathbb{C}$, $\xi \neq 0$. Demostrar que

$$P_{\xi a} = P_a.$$

En otras palabras, si $b \in H$ y $\operatorname{lin}(b) = \operatorname{lin}(a)$, entonces

$$P_b = P_a.$$

Un ejemplo numérico

Ejercicio. Encontrar la matriz P_a y los vectores u, w, si

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Hacer comprobaciones:

$$P_a^2 = P_a, \qquad P_a^* = P_a, \qquad w \perp a, \qquad \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle = \langle v, v \rangle.$$

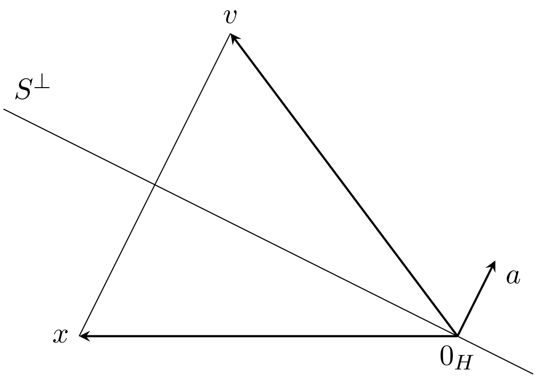
Código en Sagemath

```
def orth_proj_over_vector(a, v):
    return (v.dot_product(a) / a.dot_product(a)) * a

def test_orth_proj():
    n = 4; a1 = random_vector(CDF, n); v1 = random_vector(CDF, n)
    u1 = orth_proj_over_vector(a1, v1); w1 = v1 - u1
    u1u1 = u1.dot_product(u1); w1w1 = w1.dot_product(w1)
    v1v1 = v1.dot_product(v1); w1a1 = w1.dot_product(a1)
    print(a1); print(v1); print(w1a1); print(u1u1+w1w1); print(v1v1)

test_orth_proj()
```

Reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio



Ejercicio.

Sean $a \in H$, $a \neq 0_H$, $v \in H$.

Pongamos $S := \operatorname{lin}(a)$.

Encontrar $x \in H$ tal que

$$x - v \in S,$$

$$\frac{1}{2}(v + x) \in S^\perp.$$

Si denotamos x por $R_a(v)$, ¿qué propiedades tiene R_a?