El cálculo de la proyección ortogonal en términos de una base no ortogonal

Objetivos. Sea (a_1, \ldots, a_m) una lista linealmente de vectores en un espacio H con producto interno, sea S el subespacio vectorial generado por a_1, \ldots, a_m y sea $u \in H$. Expresar $P_S u$ en términos de la matriz de Gram G(a) y los números $\langle u, a_k \rangle$.

Prerrequisitos. El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, la matriz adjunta, operaciones con matrices, la matriz de Gram.

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo. Fijamos una lista $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ de vectores en H. Suponemos que \mathcal{A} es linealmente independiente. Denotamos por $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ a la lista ortonormal de vectores que se obtiene de \mathcal{A} al aplicar el proceso de Gram-Schmidt.

1 Observación (el proceso de Gram–Schmidt, expresión de los vectores viejos en términos de los nuevos y viceversa). Sabemos que para cada k en $\{1, \ldots, m\}$,

$$b_k = \frac{1}{\|c_k\|} c_k,$$

donde

$$c_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, b_j \rangle b_j.$$

Por lo tanto,

$$a_k = \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, b_j \rangle + ||c_k|| b_k.$$

Definimos $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$R_{j,k} := \begin{cases} \langle a_k, b_j \rangle, & j < k; \\ \|c_k\|, & j = k; \\ 0, & j > k. \end{cases}$$

Por la definición, la matriz R es triangular superior e invertible. Notemos que R^{-1} también es triangular superior. Usando las matrices R y R^{-1} , podemos expresar \mathcal{A} en términos de \mathcal{B} y viceversa. En efecto,

$$a_k = \sum_{j=1}^k R_{j,k} b_j = \sum_{j=1}^m R_{j,k} b_j.$$
 (1)

La proyección ortogonal en términos de una base no ortogonal, página 1 de 3

Notemos que para cada p en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\sum_{k=1}^{m} (R^{-1})_{k,p} a_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (R^{-1})_{k,p} R_{j,k} b_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} R_{j,k} (R^{-1})_{k,p} \right) b_j = \sum_{j=1}^{m} \delta_{j,p} b_j = b_p.$$

Resumiendo,

$$b_p = \sum_{k=1}^{m} (R^{-1})_{k,p} a_k = \sum_{k=1}^{p} (R^{-1})_{k,p} a_k.$$
 (2)

Recordemos que la matriz de Gram de la lista $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ se define de la sigiente manera:

 $G(\mathcal{A}) := \left[\langle a_q, a_p \rangle \right]_{p,q=1}^m.$

2 Proposición (la matriz de Gram de los vectores viejos).

$$G(\mathcal{A}) = R^*R.$$

Demostración. Sean $p,q \in \{1,\ldots,m\}$. Calculemos la componente (p,q) de la matriz $G(\mathcal{A})$.

$$G(\mathcal{A})_{p,q} = \langle a_q, a_p \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m R_{j,q} b_j, \sum_{k=1}^m R_{k,p} b_k \right\rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m R_{j,q} \overline{R_{k,p}} \langle b_j, b_k \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m R_{j,q} \overline{R_{k,p}} \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^m (R^*)_{p,j} R_{j,q} = (R^*R)_{p,q}.$$

3 Proposición. Sea $u \in H$. Pongamos

$$\alpha \coloneqq \left[\langle u, a_j \rangle \right]_{j=1}^m, \qquad \beta \coloneqq \left[\langle u, b_j \rangle \right]_{j=1}^m.$$

Entonces,

$$\alpha = R^* \beta. \tag{3}$$

Como consecuencia,

$$\beta = (R^*)^{-1}\alpha. \tag{4}$$

Demostración. Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\alpha_j = \langle u, a_j \rangle = \left\langle u, \sum_{k=1}^m R_{k,j} b_k \right\rangle = \sum_{k=1}^m \overline{R_{k,j}} \beta_k = (R^* \beta)_j.$$

La proyección ortogonal en términos de una base no ortogonal, página 2 de 3

4 Teorema (la proyección ortogonal sobre un subespacio de dimensión finita, en términos de una base no ortogonal del subespacio). Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ una lista linealmente independiente de vectores en H, sea S el subespacio vectorial generado por \mathcal{A} y sea $u \in H$. Entonces,

$$P_S u = \sum_{j=1}^m \gamma_j a_j,$$

donde

$$\gamma := G(\mathcal{A})^{-1} \alpha, \qquad \alpha := \left[\langle u, a_k \rangle \right]_{k=1}^m.$$

Demostración. Sabemos que

$$P_S u = \sum_{p=1}^m \beta_p b_p.$$

Aplicamos (4) y (2):

$$P_S u = \sum_{p=1}^m ((R^*)^{-1} \alpha)_p \sum_{j=1}^m (R^{-1})_{j,p} a_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{p=1}^m (R^{-1})_{j,p} ((R^*)^{-1} \alpha)_p \right) a_j$$
$$= \sum_{j=1}^m (R^{-1} (R^*)^{-1} \alpha)_j a_j = \sum_{j=1}^m ((R^* R)^{-1} \alpha)_j a_j = \sum_{j=1}^m (G(A)^{-1} \alpha)_j a_j. \quad \Box$$