La descomposición ortogonal de un vector en un espacio de Hilbert (un tema de la unidad “Espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

28 de junio de 2022

Vamos a demostrar el siguiente resultado.

Teorema

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$.

Entonces existe un único u en S tal que $v - u \in S^{\perp}$.

Vamos a demostrar el siguiente resultado.

Teorema

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$.

Entonces existe un único u en S tal que $v - u \in S^{\perp}$.

Prerrequisito principal: el resultado que en S existe el vector más cercano a v.

Vamos a demostrar el siguiente resultado.

Teorema

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$.

Entonces existe un único u en S tal que $v - u \in S^{\perp}$.

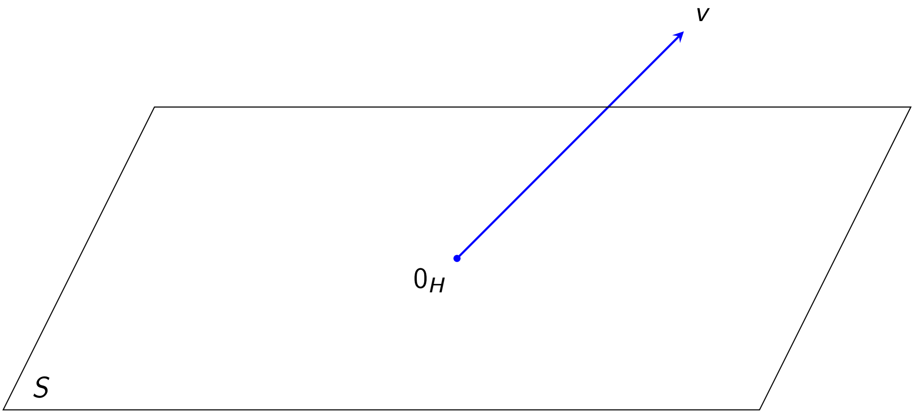
Prerrequisito principal: el resultado que en S existe el vector más cercano a v.

Aplicaciones principales:

- el operador P_S de la proyección ortogonal sobre S,
- demostración del teorema de Riesz–Fréchet sobre los funcionales lineales acotados en H.

Un dibujo para entender mejor el enunciado del teorema

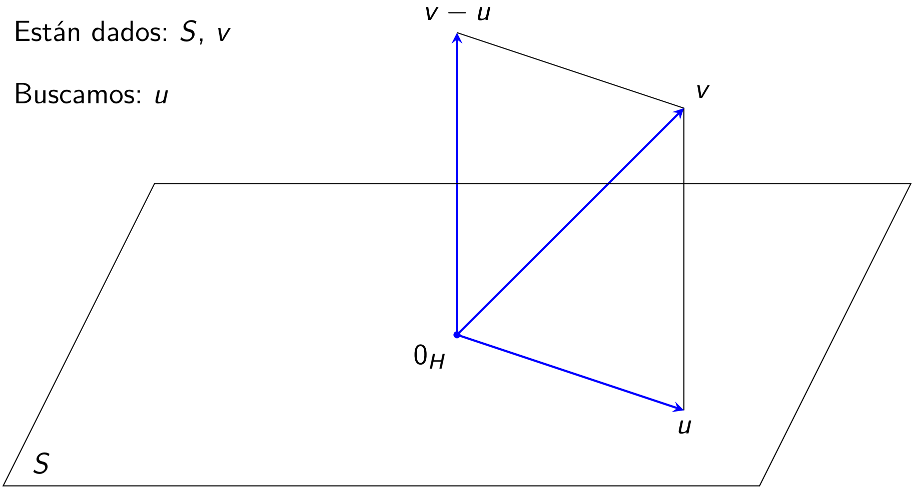
Están dados: S, v



Un dibujo para entender mejor el enunciado del teorema

Están dados: S, v

Buscamos: u



Demostración de la unicidad

Sean u y a dos candidatos.

Demostración de la unicidad

Sean u y a dos candidatos.

$\boxed{u \in S}$ $\boxed{v - u \in S^{\perp}}$ $\boxed{a \in S}$ $\boxed{v - a \in S^{\perp}}$

Demostración de la unicidad

Sean u y a dos candidatos.

$$
\begin{tikzcd}
u \in S \arrow[dr] & & v-u \in S^{\perp} \arrow[drrr] & & a \in S \arrow[dlll] & & v-a \in S^{\perp} \arrow[dl] \\
& u-a \in S & & & & u-a \in S^{\perp} &
\end{tikzcd}
$$

Demostración de la unicidad

Sean u y a dos candidatos.

$$
\begin{tikzcd}
u \in S \arrow[dr] & & v - u \in S^{\perp} \arrow[drrr] & & a \in S \arrow[dlll] & & v - a \in S^{\perp} \arrow[dl] \\
& u - a \in S \arrow[drr] & & & & u - a \in S^{\perp} \arrow[dll] & \\
& & & \langle u - a, u - a \rangle = 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

Demostración de la unicidad

Sean u y a dos candidatos.

$$\begin{tikzcd}
u \in S \arrow[dr] & & v-u \in S^{\perp} \arrow[drrr] & & a \in S \arrow[dlll] & & v-a \in S^{\perp} \arrow[dl] \\
& u-a \in S \arrow[drr] & & & & u-a \in S^{\perp} \arrow[dll] & \\
& & & \langle u-a, u-a \rangle = 0 \arrow[d] & & & \\
& & & u-a = 0_H & & &
\end{tikzcd}$$

Demostración de la existencia: definición de u

Demostración de la existencia: definición de u

En una de las clases pasadas demostramos el siguiente resultado.

Demostración de la existencia: definición de u

En una de las clases pasadas demostramos el siguiente resultado.

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$.
Entonces existe un único u en S tal que

$$\forall x \in S \setminus \{u\} \qquad \|x - v\| > \|u - v\|.$$

Demostración de la existencia: definición de u

En una de las clases pasadas demostramos el siguiente resultado.

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$.
Entonces existe un único u en S tal que

$$\forall x \in S \setminus \{u\} \qquad \|x - v\| > \|u - v\|.$$

Usando este resultado, vamos a demostrar la parte de existencia en el teorema.
Sea u el vector con la propiedad escrita arriba (el elemento de S más cercano a v).

Demostración de la existencia: definición de u

En una de las clases pasadas demostramos el siguiente resultado.

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$.
Entonces existe un único u en S tal que

$$\forall x \in S \setminus \{u\} \qquad \|x - v\| > \|u - v\|.$$

Usando este resultado, vamos a demostrar la parte de existencia en el teorema.
Sea u el vector con la propiedad escrita arriba (el elemento de S más cercano a v).

Definimos $w := v - u$. Nos falta mostrar que $w \perp S$.

Demostración de la existencia: definición de u

En una de las clases pasadas demostramos el siguiente resultado.

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$.
Entonces existe un único u en S tal que

$$\forall x \in S \setminus \{u\} \qquad \|x - v\| > \|u - v\|.$$

Usando este resultado, vamos a demostrar la parte de existencia en el teorema.
Sea u el vector con la propiedad escrita arriba (el elemento de S más cercano a v).

Definimos $w := v - u$. Nos falta mostrar que $w \perp S$.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Demostración de la existencia: verificación que $w \perp S$

Supongamos que $w \notin S^{\perp}$.

Demostración de la existencia: verificación que $w \perp S$

Supongamos que $w \notin S^{\perp}$. Encontramos $s \in S$ tal que $\langle s, w \rangle \neq 0$.

Demostración de la existencia: verificación que $w \perp S$

Supongamos que $w \notin S^{\perp}$. Encontramos $s \in S$ tal que $\langle s, w \rangle \neq 0$.

Pongamos $t \coloneqq \dfrac{1}{\langle s, w \rangle}\, s$.

Demostración de la existencia: verificación que $w \perp S$

Supongamos que $w \notin S^{\perp}$. Encontramos $s \in S$ tal que $\langle s, w \rangle \neq 0$.

Pongamos $t \coloneqq \dfrac{1}{\langle s, w \rangle}\, s$. Entonces $t \in S$ y $\langle t, w \rangle = 1$.

Demostración de la existencia: verificación que $w \perp S$

Supongamos que $w \notin S^{\perp}$. Encontramos $s \in S$ tal que $\langle s, w\rangle \neq 0$.

Pongamos $t := \dfrac{1}{\langle s, w\rangle}\, s$. Entonces $t \in S$ y $\langle t, w\rangle = 1$.

Consideramos la familia de vectores

$$x_\lambda := u + \lambda t \quad (\lambda > 0).$$

Vamos a mostrar que para cierto $\lambda > 0$ se cumple $\|x_\lambda - v\| < \|u - v\|$.

Demostración de la existencia: verificación que $w \perp S$

Supongamos que $w \notin S^{\perp}$. Encontramos $s \in S$ tal que $\langle s, w\rangle \neq 0$.

Pongamos $t := \dfrac{1}{\langle s, w\rangle}\, s$. Entonces $t \in S$ y $\langle t, w\rangle = 1$.

Consideramos la familia de vectores

$$x_\lambda := u + \lambda t \quad (\lambda > 0).$$

Vamos a mostrar que para cierto $\lambda > 0$ se cumple $\|x_\lambda - v\| < \|u - v\|$.

$$\begin{aligned} \|x_\lambda - v\|^2 &= \|u + \lambda t - u - w\|^2 = \|\lambda t - w\|^2 \\ &= \lambda^2 \|t\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}(\langle t, w\rangle) + \|w\|^2 = \lambda^2 \|t\|^2 - 2\lambda + \|w\|^2. \end{aligned}$$

Demostración de la existencia: verificación que $w \perp S$

Supongamos que $w \notin S^\perp$. Encontramos $s \in S$ tal que $\langle s, w\rangle \neq 0$.

Pongamos $t := \dfrac{1}{\langle s, w\rangle}\, s$. Entonces $t \in S$ y $\langle t, w\rangle = 1$.

Consideramos la familia de vectores

$$x_\lambda := u + \lambda t \quad (\lambda > 0).$$

Vamos a mostrar que para cierto $\lambda > 0$ se cumple $\|x_\lambda - v\| < \|u - v\|$.

$$\begin{aligned}\|x_\lambda - v\|^2 &= \|u + \lambda t - u - w\|^2 = \|\lambda t - w\|^2 \\ &= \lambda^2\|t\|^2 - 2\lambda\,\mathrm{Re}(\langle t, w\rangle) + \|w\|^2 = \lambda^2\|t\|^2 - 2\lambda + \|w\|^2.\end{aligned}$$

Sea $\lambda := \frac{1}{\|t\|^2}$.

Demostración de la existencia: verificación que $w \perp S$

Supongamos que $w \notin S^\perp$. Encontramos $s \in S$ tal que $\langle s, w\rangle \neq 0$.

Pongamos $t := \dfrac{1}{\langle s, w\rangle}\, s$. Entonces $t \in S$ y $\langle t, w\rangle = 1$.

Consideramos la familia de vectores

$$x_\lambda := u + \lambda t \quad (\lambda > 0).$$

Vamos a mostrar que para cierto $\lambda > 0$ se cumple $\|x_\lambda - v\| < \|u - v\|$.

$$\begin{aligned}\|x_\lambda - v\|^2 &= \|u + \lambda t - u - w\|^2 = \|\lambda t - w\|^2 \\ &= \lambda^2\|t\|^2 - 2\lambda\,\mathrm{Re}(\langle t, w\rangle) + \|w\|^2 = \lambda^2\|t\|^2 - 2\lambda + \|w\|^2.\end{aligned}$$

Sea $\lambda := \frac{1}{\|t\|^2}$. Entonces $\|x_\lambda - v\|^2 = \|w\|^2 - \dfrac{1}{\|t\|^2} < \|w\|^2 = \|u - v\|^2$.

Demostración de la existencia: verificación que $w \perp S$

Supongamos que $w \notin S^\perp$. Encontramos $s \in S$ tal que $\langle s, w\rangle \neq 0$.

Pongamos $t := \dfrac{1}{\langle s, w\rangle}\, s$. Entonces $t \in S$ y $\langle t, w\rangle = 1$.

Consideramos la familia de vectores

$$x_\lambda := u + \lambda t \quad (\lambda > 0).$$

Vamos a mostrar que para cierto $\lambda > 0$ se cumple $\|x_\lambda - v\| < \|u - v\|$.

$$\begin{aligned}\|x_\lambda - v\|^2 &= \|u + \lambda t - u - w\|^2 = \|\lambda t - w\|^2 \\ &= \lambda^2\|t\|^2 - 2\lambda\,\mathrm{Re}(\langle t, w\rangle) + \|w\|^2 = \lambda^2\|t\|^2 - 2\lambda + \|w\|^2.\end{aligned}$$

Sea $\lambda := \frac{1}{\|t\|^2}$. Entonces $\|x_\lambda - v\|^2 = \|w\|^2 - \dfrac{1}{\|t\|^2} < \|w\|^2 = \|u - v\|^2$. Contradicción.

Otras formas equivalentes del teorema

Corolario

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$.

Entonces existe un único par $(u, w) \in S \times S^{\perp}$ tal que $v = u + w$.

Otras formas equivalentes del teorema

Corolario

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$.

Entonces existe un único par $(u, w) \in S \times S^\perp$ tal que $v = u + w$.

Corolario

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H.

Entonces H es la suma directa de S y $S^\perp$.

Ejercicio. Entender el sentido geométrico de la demostración ($w \notin S^{\perp}$, $x_\lambda = u + \lambda t$).

Ejercicio. Entender el sentido geométrico de la demostración ($w \notin S^{\perp}$, $x_\lambda = u + \lambda t$).

Ejercicio. Mostrar que en la notación de la demostración,

$$\exists \delta > 0 \qquad \forall \lambda \in (0, \delta) \qquad \|x_\lambda - v\|^2 < \|w\|^2.$$

Ejercicio. Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$,

$$u \in S, \qquad v - u \in S^{\perp}.$$

Demostrar directamente (sin usar el teorema de este tema) que

$$\forall x \in S \setminus \{u\} \qquad \|x - v\| > \|u - v\|.$$

Ejercicio. Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$,

$$u \in S, \qquad v - u \in S^{\perp}.$$

Demostrar directamente (sin usar el teorema de este tema) que

$$\forall x \in S \setminus \{u\} \qquad \|x - v\| > \|u - v\|.$$

Este ejercicio puede servir como una motivación de la demostración del teorema que vimos: el vector u que buscamos debe de ser el elemento de S más cercano a v.