Operaciones con conjuntos (repaso)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2 de marzo de 2021

Objetivo:

repasar la definición de las operaciones con conjuntos y sus propiedades elementales.

Prerrequisitos:

lógica de afirmaciones, tablas de verdad, definición de las operaciones con conjuntos.

Contención e igualdad de conjuntos

$$A \subseteq B \qquad \iff \qquad \forall x \quad (x \in A) \implies (x \in B).$$

$$A = B \qquad \iff \qquad \forall x \quad \big((x \in A) \iff (x \in B)\big).$$

La igualdad de conjuntos en términos de contenciones

Lema

Para cada $p, q \in \{0, 1\}$,

$$(p \leftrightarrow q) \;=\; (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

La igualdad de conjuntos en términos de contenciones

Lema

Para cada $p, q \in \{0, 1\}$,

$$(p \leftrightarrow q) \;=\; (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Demostración.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

La igualdad de conjuntos en términos de contenciones

Proposición

Sean A y B conjuntos. Entonces

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A \subseteq B) \ \wedge \ (B \subseteq A).$$

La igualdad de conjuntos en términos de contenciones

Proposición

Sean A y B conjuntos. Entonces

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A \subseteq B) \ \land \ (B \subseteq A).$$

Demostración. Sea x un punto arbitrario. Pongamos

$$p(x) := x \in A, \qquad q(x) := x \in B.$$

Por el Lema,

$$(p(x) \leftrightarrow q(x)) \ = \ (p(x) \to q(x)) \land (q(x) \to p(x)).$$

Luego

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A \subseteq B) \ \land \ (B \subseteq A).$$

Operaciones $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\triangle$

$$A \cup B := \{x : \quad x \in A \quad \vee \quad x \in B\}.$$

$$A \cap B := \{x : \quad x \in A \quad \wedge \quad x \in B\}.$$

$$A \setminus B := \{x : \quad x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}.$$

$$A \triangle B := \{x : \quad x \in A \quad \oplus \quad x \in B\}.$$

Proposición (la propiedad asociativa de $\cup$)

Sean A, B, C conjuntos. Entonces

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Proposición (la propiedad asociativa de $\cup$)

Sean A, B, C conjuntos. Entonces

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Demostración. Para cualquier x, tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$x \in (A \cup B) \cup C$$

Proposición (la propiedad asociativa de $\cup$)

Sean A, B, C conjuntos. Entonces

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Demostración. Para cualquier x, tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$x \in (A \cup B) \cup C \qquad \overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} \qquad (x \in A \cup B) \ \vee \ (x \in C)$$

Proposición (la propiedad asociativa de $\cup$)

Sean A, B, C conjuntos. Entonces

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Demostración. Para cualquier x, tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C \quad & \overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} \quad (x \in A \cup B) \ \vee \ (x \in C) \\ & \overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} \quad ((x \in A) \ \vee \ (x \in B)) \ \vee \ (x \in C) \end{aligned}$$

Proposición (la propiedad asociativa de $\cup$)

Sean A, B, C conjuntos. Entonces

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Demostración. Para cualquier x, tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cup C \quad & \xLeftrightarrow{\text{def } \cup} \quad (x \in A \cup B) \ \vee \ (x \in C) \\
& \xLeftrightarrow{\text{def } \cup} \quad ((x \in A) \ \vee \ (x \in B)) \ \vee \ (x \in C) \\
& \xLeftrightarrow{\vee \text{ es asociativa:}} \quad (x \in A) \ \vee \ ((x \in B) \ \vee \ (x \in C))
\end{aligned}
$$

Proposición (la propiedad asociativa de $\cup$)

Sean A, B, C conjuntos. Entonces

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Demostración. Para cualquier x, tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cup C \quad & \xLeftrightarrow{\text{def } \cup} \quad (x \in A \cup B) \ \vee \ (x \in C) \\
& \xLeftrightarrow{\text{def } \cup} \quad ((x \in A) \ \vee \ (x \in B)) \ \vee \ (x \in C) \\
& \xLeftrightarrow{\vee \text{ es asociativa:}} \quad (x \in A) \ \vee \ ((x \in B) \ \vee \ (x \in C)) \\
& \xLeftrightarrow{\text{def } \cup} \quad (x \in A) \ \vee \ (x \in B \cup C)
\end{aligned}$$

Proposición (la propiedad asociativa de $\cup$)

Sean A, B, C conjuntos. Entonces

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Demostración. Para cualquier x, tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cup C \quad & \xLeftrightarrow{\text{def } \cup} \quad (x \in A \cup B) \ \vee \ (x \in C) \\
& \xLeftrightarrow{\text{def } \cup} \quad ((x \in A) \ \vee \ (x \in B)) \ \vee \ (x \in C) \\
& \xLeftrightarrow{\vee \text{ es asociativa:}} \quad (x \in A) \ \vee \ ((x \in B) \ \vee \ (x \in C)) \\
& \xLeftrightarrow{\text{def } \cup} \quad (x \in A) \ \vee \ (x \in B \cup C) \\
& \xLeftrightarrow{\text{def } \cup} \quad x \in A \cup (B \cup C).
\end{aligned}$$

Propiedades de $\cup$

Ejercicio. Demostrar la propiedad conmutativa de $\cup$.

Propiedades de $\cup$

Ejercicio. Demostrar la propiedad conmutativa de $\cup$.

Ejercicio. ¿Cuál es el conjunto neutro para la operación $\cup$?

Propiedades de $\cup$

Ejercicio. Demostrar la propiedad conmutativa de $\cup$.

Ejercicio. ¿Cuál es el conjunto neutro para la operación $\cup$?

Ejercicio. Sea X un conjunto. Consideremos 2^X con la operación $\cup$. ¿Es un grupo?

Propiedades de la intersección

Ejercicio. Demostrar la propiedad asociativa de $\cap$.

Ejercicio. Demostrar la propiedad conmutativa de $\cap$.

Ejercicio. Sea X un conjunto. Consideremos 2^X con la operación $\cap$.
¿Hay un elemento neutro?
¿Es un grupo?

Leyes distributivas

Repasar las demostraciones de las leyes distributivas:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

La unión contiene a cada uno de los argumentos

Proposición

Sean A, B conjuntos. Entonces $A \subseteq A \cup B$.

La unión contiene a cada uno de los argumentos

Proposición

Sean A, B conjuntos. Entonces $A \subseteq A \cup B$.

Demostremos que p siempre implica $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

La unión contiene a cada uno de los argumentos

Proposición

Sean A, B conjuntos. Entonces $A \subseteq A \cup B$.

Demostremos que p siempre implica $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Sea x un punto arbitrario. Pongamos $\quad p := x \in A, \quad q := x \in B.$

Como $p \to (p \vee q) = 1$, obtenemos $\qquad (x \in A) \quad \Longrightarrow \quad (x \in A \cup B).$

Proposición

Sean A, B, C algunos conjuntos tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$. Entonces

$$A \cup B \subset C.$$

Proposición

Sean A, B, C algunos conjuntos tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$. Entonces

$$A \cup B \subset C.$$

Un camino posible: demostrar que para cualesquiera p, q, r en $\{0, 1\}$,

$$(p \to r) \ \wedge \ (q \to r) \ \to ((p \ \vee \ q) \ \to r) = 1.$$

Otro camino: suponer $x \in A \cup B$ y considerar dos casos.

Propiedad extremista de la unión

Proposición

Sean A y B algunos conjuntos.

Entonces $A \cup B$ es el conjunto más pequeño entre todos aquellos conjuntos que contienen a cada uno de los conjuntos A y B.

Propiedad extremista de la intersección

Ejercicio. Enunciar y demostrar resultados similares para $\cap$.

Criterio de que un conjunto está contenido en el otro

Proposición

Sean A y B conjuntos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $A \subset B$; (ii) $A \cap B = A$; (iii) $A \cup B = B$; (iv) $A \setminus B = \varnothing$.

Propiedades de la diferencia de conjuntos

Ejercicio. Sean A, B conjuntos. Demostrar que

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B.$$

Propiedades de la diferencia de conjuntos

Ejercicio. Sean A, B conjuntos. Demostrar que

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B.$$

Ejercicio. Sean A, B conjuntos tales que $A \subseteq B$. Demostrar que

$$B = A \cup (B \setminus A).$$

Propiedades de la diferencia de conjuntos

Ejercicio. Sean A, B conjuntos. Demostrar que

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B.$$

Ejercicio. Sean A, B conjuntos tales que $A \subseteq B$. Demostrar que

$$B = A \cup (B \setminus A).$$

Ejercicio. Sean A, B, C conjuntos. Demostrar que

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$

Propiedades de la diferencia de conjuntos

Ejercicio. Encontrar una fórmula la siguiente expresión:

$$A \setminus (B \setminus C).$$

Propiedades de la diferencia de conjuntos

Ejercicio. Encontrar una fórmula la siguiente expresión:

$$A \setminus (B \setminus C).$$

Observación. La fórmula para $A \setminus (B \setminus C)$ no es similar a la fórmula

$$x - (y - z) = x - y + z \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Es una razón para **no** escribir $A - B$ en vez de $A \setminus B$.

Leyes de De Morgan para $\cup$ y $\cap$

Ejercicio. Sean A, B, C conjuntos. Demostrar que

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \qquad C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

La "desigualdad del triángulo" para la diferencia de conjuntos

Ejercicio.

Sean A, B, C conjuntos. Demostrar que

$$A \setminus B \subseteq (A \setminus C) \cup (C \setminus B).$$

Un camino posible:

$$\forall p, q, r \in \{0, 1\} \qquad (p \wedge \overline{q}) \to \big((p \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge \overline{q})\big).$$

Complemento

Cuando trabajan con subconjuntos de un conjunto fijo X,
para cada $A \subseteq X$ la diferencia $X \setminus A$ se llama el complemento de A (respecto X).
Notación: A^c.

Proposición (el complemento del complemento)

Sea $A \subset X$. Entonces

$$(A^c)^c = A,$$

donde el complemento se considera respecto X.

Las leyes de De Morgan para el complemento, $\cup$ y $\cap$

Proposición

Sean $A, B \subset X$. Entonces

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

donde el complemento se toma respecto X.

Tres definiciones equivalentes de la diferencia simétrica

$$A \triangle B \;\coloneqq\; \Big\{x\colon \quad (x \in A) \;\oplus\; (x \in B)\Big\}.$$

Tres definiciones equivalentes de la diferencia simétrica

$$A \triangle B \;\coloneqq\; \Big\{x\colon \quad (x \in A) \;\oplus\; (x \in B)\Big\}.$$

Proposición

$$A \triangle B \;=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \;=\; (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

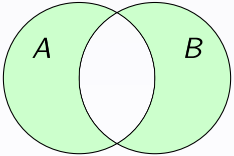
Tres definiciones equivalentes de la diferencia simétrica

$$A \mathbin{\triangle} B \ := \ \Big\{x\colon \quad (x \in A) \ \oplus \ (x \in B)\Big\}.$$

Proposición

$$A \mathbin{\triangle} B \ = \ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \ = \ (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

$A \mathbin{\triangle} B$



La diferencia simétrica es asociativa y conmutativa

Propiedad asociativa de la diferencia simétrica.

Sean A, B, C conjuntos. Demostrar que

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

La diferencia simétrica es asociativa y conmutativa

Propiedad asociativa de la diferencia simétrica.
Sean A, B, C conjuntos. Demostrar que

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Propiedad conmutativa de la diferencia simétrica.
Sean A, B conjuntos. Demostrar que

$$A \triangle B = B \triangle A.$$

Propiediedades de $\triangle$

Ejercicio.

Sean A, B algunos conjuntos. Mostrar que

$$A \triangle B = \varnothing \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = B.$$

Propiediedades de $\triangle$

Ejercicio.

Sean A, B algunos conjuntos. Mostrar que

$$A \triangle B = \varnothing \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = B.$$

Ejercicio.

Sea X un conjunto. Consideremos el conjunto 2^X con la operación $\triangle$.

¿Es un grupo?

La “desigualdad del triángulo” para la diferencia simétrica

Sean A, B, C conjuntos. Demostrar que

$$A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

La “continuidad de Lipschitz” de $\cup$, $\cap$ y $\setminus$

Sean A, B, C, D conjuntos. Demostrar que

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \triangle (C \cup D) &\subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle D),\\
(A \cap B) \triangle (C \cap D) &\subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle D),\\
(A \setminus B) \triangle (C \setminus D) &\subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle D),
\end{aligned}$$