Operaciones con conjuntos (repaso)

Objetivos. Repasar la definición de las operaciones con conjuntos y sus propiedades elementales.

Requisitos. Lógica de afirmaciones, tablas de verdad, definición de las operaciones con conjuntos.

Contención

1. ¿Cómo demostrar la contención de conjuntos?. ¿Cómo demostrar que $A \subseteq B$? Indique los métodos correctos:

- ☑ Demostrar que para todo x si $x \in A$, entonces $x \in B$.
- ☐ Demostrar que para todo x si $x \in B$, entonces $x \in A$.
- ☐ Demostrar que para todo x si $x \notin A$, entonces $x \notin B$.
- ☐ Demostrar que para todo x si $x \notin B$, entonces $x \notin A$.

2. Implicación y contención. Sean P y Q dos predicados, definidos en un conjunto X, tales que $P(x)$ implica $Q(x)$ para todo $x \in X$. Determine la relación entre los siguientes conjuntos:

$$\{x \in X\colon P(x)\} \underbrace{\qquad\qquad}_{¿\subseteq\ /\ \supseteq?} \{x \in X\colon Q(x)\}.$$

Dé un ejemplo con $X = \mathbb{R}$ o con $X = \mathbb{Z}$.

3. ¿Cómo demostrar la igualdad de conjuntos?. ¿Cómo demostrar que $A = B$? Indique los métodos correctos:

- ☑ Demostrar que para todo x las condiciones $x \in A$ y $x \in B$ son equivalentes.
- ☐ Demostrar que para todo $x \in X$ si $x \in B$, entonces $x \in A$.
- ☐ Demostrar que para todo $x \in X$ si $x \notin A$, entonces $x \notin B$.
- ☐ Demostrar que para todo $x \in X$ si $x \notin B$, entonces $x \notin A$.

Operaciones con conjuntos

4. Operaciones binarias con conjuntos. Repasar las definiciones de

$$A \cup B, \qquad A \cap B, \qquad A \setminus B.$$

5. Propiedades de la unión. Determine cuáles de las siguientes propiedades tiene la operación $\cup$ (unión de conjuntos): ¿es asociativa? ¿conmutativa? ¿existe un elemento neutro? ¿existe un elemento "inverso" para cada elemento?

6. La unión de dos conjuntos contiene a cada uno de los conjuntos originales. Sean A, B algunos conjuntos. Demuestre que

$$A \subseteq A \cup B.$$

De manera similar se demuestra que $B \subseteq A \cup B$.

7. La unión de dos conjuntos es el conjunto más pequeño entre todos los conjuntos que contienen a cada uno de los conjuntos originales. Sean A, B, C algunos conjuntos tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$. Demuestre que

$$A \cup B \subseteq C.$$

8. La intersección de dos conjuntos está contenida en cada uno de los conjuntos origionales. Sean A, B algunos conjuntos. Demuestre que

$$A \cap B \subseteq A.$$

De manera similar se demuestra que $A \cap B \subseteq B$.

9. La intersección de dos conjuntos es el conjunto más grande entre todos los conjuntos contenidos en cada uno de los conjuntos originales. Sean A, B, C algunos conjuntos tales que $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$. Demuestre que

$$C \subseteq A \cap B.$$

10. ¿Cómo demostrar propiedades de las operaciones con conjuntos?. Son cómodos los siguientes dos métodos:

- Utilizando definiciones de las operaciones con conjuntos reducir la fórmula a una fórmula lógica, la cuál se puede demostrar con leyes de lógica proposicional o con tablas de verdad.
- Utilizando diagramas de Euler–Venn.

11. Criterio de que un conjunto está contenido en el otro. Sean A y B conjuntos. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

$$\text{(i) } A \subseteq B; \qquad \text{(ii) } A \cap B = A; \qquad \text{(iii) } A \cup B = B; \qquad \text{(iv) } A \setminus B = \varnothing.$$

12. Leyes distributivas. Repasar las demostraciones de las leyes distributivas:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Diferencia de conjuntos

13. Diferencia e intersección. Sean A, B conjuntos. Demostrar que

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

14. Diferencias dobles. Sean A, B, C conjuntos. Enunciar y demostrar fórmulas para las siguientes expresiones:

$$A \setminus (B \setminus C), \qquad\qquad (A \setminus B) \setminus C.$$

Establecer una relación ($=$, $\subseteq$ o $\supseteq$) entre estos dos conjuntos.

15. Observación. Comparando la fórmula para $A \setminus (B \setminus C)$ con la fórmula para $x - (y - z)$, donde $x, y, z \in \mathbb{R}$, es fácil ver que la diferencia de conjuntos no tiene las mismas propiedades que la diferencia de números. Por eso usamos la notación $A \setminus B$ y evitamos la notación obsoleta $A - B$.

16. Diferencia doble, caso particular. Sean A y B conjuntos. Simplificar la siguiente expresión:

$$A \setminus (B \setminus A).$$

17. Las leyes de De Morgan. Sean A, B, C conjuntos. Entonces

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \qquad C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Complemento

18. Complemento. Cuando trabajan con subconjuntos de un conjunto fijo X, la diferencia $X \setminus A$ de un conjunto $A \subseteq X$ se llama *complemento de A con respecto a X* y se denota por A^c.

19. Complemento del complemento. Sea $A \subseteq X$. Entonces

$$(A^c)^c = A,$$

donde el complemento se considera con respecto a X.

20. Complemento de la unión y de la intersección de dos conjuntos (leyes de De Morgan). Sean $A, B \subset X$. Entonces

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

donde el complemento se toma con respecto a X.

La diferencia simétrica de conjuntos

21. Dos definiciones de la diferencia simétrica. Sean A, B conjuntos. Demuestre que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

El conjunto que está en ambos lados de la fórmula se llama *diferencia simétrica* de A y B y se denota por $A \triangle B$.

22. Diferencia simétrica de dos conjuntos iguales. Sea A un conjunto. Simplifique la expresión:

$$A \triangle A.$$

23. Propiedad conmutativa de la diferencia simétrica. Sean A, B conjuntos. Entonces obviamente

$$A \triangle B = B \triangle A.$$

24. "Desigualdad del triángulo" para la diferencia simétrica. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

25. Propiedad asociativa de la diferencia simétrica. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

26. Los subconjuntos de un conjunto con la operación diferencia simétrica forman un grupo. Sea X un conjunto. Consideramos el conjunto potencia 2^X con la operación binaria $\triangle$. Demostrar que $(2^X, \triangle)$ es un grupo.