Operaciones con familias de conjuntos (repaso)

Objetivos. Repasar la definición de las operaciones con familias de conjuntos y algunas de sus propiedades principales.

Requisitos. Operaciones con conjuntos, predicados.

En estos apuntes la contención de conjuntos (no necesariamente estricta) se denota con el símbolo $\subset$.

Operaciones con familias de conjuntos

1. Definición (la unión de una familia de conjuntos). Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos. Entonces

$$\bigcup_{j\in J} A_j \coloneqq \big\{x\colon \quad \exists j\in J \quad x\in A_j\big\}.$$

2. Definición (la intersección de una familia de conjuntos). Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos. Escriba la definición de la intersección de $(A_j)_{j\in J}$:

$$\bigcap_{j\in J} A_j = ?$$

3. La unión de una familia de conjuntos contiene a cada uno de los conjuntos de esta familia. Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea $k\in J$. Demostrar que

$$A_k \subset \bigcup_{j\in J} A_j.$$

4. La unión de una familia de conjuntos es el conjunto más pequeño entre los conjuntos que contienen a cada uno de los elementos de esta familia. Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea C un conjunto tal que

$$\forall j\in J \qquad A_j \subset C.$$

Demuestre que

$$\bigcup_{j\in J} A_j \subset C.$$

5. La intersección de una familia de conjuntos está contenida en cada uno de los conjuntos de esta familia. Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea $k\in J$. Demostrar que

$$\bigcap_{j\in J} A_j \subset A_k.$$

6. La intersección de una familia de conjuntos es el conjunto más grande entre los conjuntos que están contenidos en cada uno de los elementos de esta familia. Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea C un conjunto tal que

$$\forall j \in J \qquad C \subset A_j.$$

Demuestre que

$$C \subset \bigcap_{j\in J} A_j.$$

7. Criterio de que un conjunto contiene a la unión de una familia de conjuntos. Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto. Demuestre que:

$$\bigcup_{j\in J} A_j \subset B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in J \quad A_j \subset B.$$

8. Criterio de que un conjunto está contenido en la intersección de una familia de conjuntos. Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto. Demuestre que:

$$B \subset \bigcap_{j\in J} A_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in J \quad B \subset A_j.$$

9. Leyes distributivas. Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto. Entonces

$$\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \cap B = \bigcup_{j\in J}(A_j \cap B), \qquad \left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \cup B = \bigcap_{j\in J}(A_j \cup B).$$

10. Relación entre la intersección de las uniones y la unión de las intersecciones. Sea $(A_{j,k})_{(j,k)\in J\times K}$ una familia de conjuntos. Establezca la relación correcta ($=$ ó $\subset$ ó $\supset$) entre los siguientes conjuntos:

$$\bigcup_{j\in J}\left(\bigcap_{k\in K} A_{j,k}\right), \qquad\qquad \bigcap_{k\in K}\left(\bigcup_{j\in J} A_{j,k}\right).$$

11. Notación para los complementos. Trabajando con subconjuntos de un conjuntos fijo X, en vez de $X \setminus Y$ se puede escribir también Y^c.

12. Leyes de De Morgan para familias de conjuntos. Sea X on conjunto y sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de X. Demuestre que

$$\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right)^c = \bigcap_{j\in J} A_j^c, \qquad \left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)^c = \bigcup_{j\in J} A_j^c.$$