

Operaciones con familias monótonas de conjuntos

Objetivos. Estudiar las propiedades de la unión y de la intersección de familias monótonas de conjuntos.

Requisitos. Operaciones con familias de conjuntos, propiedades de operaciones con familias de conjuntos, predicados, parte entera de un número real, redondeo hacia arriba y redondeo hacia abajo.

Redondeo hacia arriba y redondeo hacia abajo

1 Definición (piso y techo de un número real). Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces el máximo número entero no superior a x se denota por $\lfloor x \rfloor$:

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\},$$

y el mínimo número entero no inferior a x se denota por $\lceil x \rceil$:

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}.$$

En otras palabras,

$$n = \lfloor x \rfloor \iff (n \in \mathbb{Z}) \wedge (n \leq x < n + 1),$$

y

$$n = \lceil x \rceil \iff (n \in \mathbb{Z}) \wedge (n < x \leq n + 1).$$

2 Ejercicio. Dado un $x \in \mathbb{R}$ construya un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq x$.

3 Ejercicio. Dado un $x > 0$ construya un $n \in \{1, 2, \dots\}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.

4 Ejercicio. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \{1, 2, \dots\}$ se cumple la desigualdad $x \leq \frac{1}{n}$. Demuestre que $x \leq 0$.

5 Definición (intervalos del eje real, repaso).

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x \wedge x < b\}, \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \wedge x < b\}, \\ (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \wedge x \leq b\}, \quad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \wedge x \leq b\}.$$

6 Ejercicio. Demuestre que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, +\infty) = (0, +\infty).$$

7 Ejercicio. Demuestre que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n] = \emptyset.$$

Operaciones con familias monótonas de conjuntos

8 Definición (familia creciente de conjuntos). Sean J un conjunto ordenado y $(A_i)_{i \in J}$ una familia de conjuntos. Se dice que esta familia es *creciente* si

$$\forall i, j \in J \quad (i < j) \quad \implies \quad (A_i \subseteq A_j).$$

Si en vez de \subseteq se tiene la contención estricta \subsetneq , entonces la familia $(A_i)_{i \in J}$ se llama *estrictamente creciente*.

9 Definición (familia decreciente de conjuntos). Sean J un conjunto ordenado y $(A_i)_{i \in J}$ una familia de conjuntos. Se dice que esta familia es *decreciente* si

$$\forall i, j \in J \quad (i < j) \quad \implies \quad (A_j \subseteq A_i).$$

Si en vez de \subseteq se tiene la contención estricta \subsetneq , entonces la familia $(A_i)_{i \in J}$ se llama *estrictamente decreciente*.

10 Ejercicio. Sea $(A_x)_{x>0}$ una familia creciente de conjuntos. Demuestre que

$$\bigcup_{x>0} A_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

11 Ejercicio. Sea $(A_x)_{x>0}$ una familia creciente de conjuntos. Demuestre que

$$\bigcap_{x>0} A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/n}.$$

12 Ejercicio. Sea $(A_x)_{x>0}$ una familia decreciente de conjuntos. Demuestre que

$$\bigcup_{x>0} A_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}.$$

13 Ejercicio. Sea $(A_x)_{x>0}$ una familia decreciente de conjuntos. Demuestre que

$$\bigcap_{x>0} A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$