Operaciones con familias monótonas de conjuntos

Objetivos. Estudiar las propiedades de la unión y de la intersección de familias monótonas de conjuntos.

Requisitos. Operaciones con familias de conjuntos, propiedades de operaciones con familias de conjuntos, predicados, parte entera de un número real, redondeo hacia arriba y redondeo hacia abajo.

Redondeo hacia arriba y redondeo hacia abajo

1. Definición (piso y techo de un número real). Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces el máximo número entero no superior a x se denota por $\lfloor x \rfloor$:

$$\lfloor x \rfloor \coloneqq \max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \le x\},$$

y el mínimo número entero no inferior a x se denota por $\lceil x \rceil$:

$$\lceil x \rceil \coloneqq \min\{k \in \mathbb{Z} \colon k \ge x\}.$$

En otras palabras,

$$n = \lfloor x \rfloor \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(n \in \mathbb{Z}\big) \quad \wedge \quad \big(n \le x < n+1\big),$$

y

$$n = \lceil x \rceil \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(n \in \mathbb{Z}\big) \quad \wedge \quad \big(n < x \le n+1\big).$$

2. Dado un $x \in \mathbb{R}$ construya un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \ge x$.

3. Dado un $x > 0$ construya un $n \in \{1, 2, \ldots\}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.

4. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \{1, 2, \ldots\}$ se cumple la desigualdad $x \le \frac{1}{n}$. Demuestre que $x \le 0$.

5. Intervalos del eje real (repaso).

$$(a,b) \coloneqq \big\{x \in \mathbb{R}\colon \quad a < x \quad \wedge \quad x < b\big\}, \qquad [a,b) \coloneqq \big\{x \in \mathbb{R}\colon \quad a \le x \quad \wedge \quad x < b\big\},$$
$$(a,b] \coloneqq \big\{x \in \mathbb{R}\colon \quad a < x \quad \wedge \quad x \le b\big\}, \qquad [a,b] \coloneqq \big\{x \in \mathbb{R}\colon \quad a \le x \quad \wedge \quad x \le b\big\}.$$

6. Demuestre que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, +\infty) = (0, +\infty).$$

7. Demuestre que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n] = \varnothing.$$

Operaciones con familias monótonas de conjuntos

8. Definición (familia creciente de conjuntos). Sean J un conjunto ordenado y $(A_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos. Se dice que esta familia es *creciente* si

$$\forall i, j \in J \qquad (i < j) \qquad \Longrightarrow \qquad (A_i \subset A_j).$$

Si en vez de $\subset$ se tiene la contención estricta $\subsetneq$, entonces la familia $(A_i)_{i\in J}$ se llama *estrictamente creciente*.

9. Definición (familia decreciente de conjuntos). Sean J un conjunto ordenado y $(A_i)_{i\in J}$ una familia de conjuntos. Se dice que esta familia es *decreciente* si

$$\forall i, j \in J \qquad (i < j) \qquad \Longrightarrow \qquad (A_j \subset A_i).$$

Si en vez de $\subset$ se tiene la contención estricta $\subsetneq$, entonces la familia $(A_i)_{i\in J}$ se llama *estrictamente decreciente*.

10. Sea $(A_x)_{x>0}$ una familia creciente de conjuntos. Demuestre que

$$\bigcup_{x>0} A_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

11. Sea $(A_x)_{x>0}$ una familia creciente de conjuntos. Demuestre que

$$\bigcap_{x>0} A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/n}.$$

12. Sea $(A_x)_{x>0}$ una familia decreciente de conjuntos. Demuestre que

$$\bigcup_{x>0} A_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}.$$

13. Sea $(A_x)_{x>0}$ una familia decreciente de conjuntos. Demuestre que

$$\bigcap_{x>0} A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$